

Exame final nacional de Matemática A (2025, 1.ª fase)

Proposta de resolução



1. Calculando o valor do limite da sucessão, temos que:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3 = \left(\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3 = e^3$$

Resposta: **Opção C**

2.

2.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

- $g(0) = 2 \sin^2(0) - \sqrt{3} \times 0 + 2 = 2 \times 0 - 0 + 2 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \sin^2(0^+) - \sqrt{3} \times 0^+ + 2 = 2 \times 0 - 0 + 2 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{\sin 0^-}{1 - \sqrt{1-0^-}} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \times (1 + \sqrt{1-x})}{1^2 - (\sqrt{1-x})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \times (1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \times (1 + \sqrt{1-x})}{x} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \sqrt{1-x}) = \\ &= 1 \times (1 + \sqrt{1-0^-}) = 1 \times 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Como $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 0$.

2.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g , para $x \in]0, \pi]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(2 \sin^2 x - \sqrt{3}x + 2\right)' = \left(2 \times (\sin x)^2\right)' - \left(\sqrt{3}x\right)' + (2)' = \\ &= 2 \left((\sin x)^2\right)' - \sqrt{3} + 0 = 2 \left(2 \times \sin x \times (\sin x)'\right) - \sqrt{3} = 2 (2 \times \sin x \times \cos x) - \sqrt{3} = \\ &= 2 \sin(2x) - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função g , em $x \in]0, \pi]$:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \sin(2x) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin(2x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, como $x \in]0, \pi]$, as únicas soluções da equação são $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3}, (k = 0)$.

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		π
g'	n.d.	—	0	+	0	—	—
g	n.d.	$\searrow$	min.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	min.

Assim, podemos concluir que a função g :

- é crescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{6}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$;
- tem extremos relativos para: $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \pi$.

3. Como em todas as linhas do triângulo de Pascal (à exceção da primeira), o segundo e o penúltimo números da linha são iguais, então designado por n , cada um destes números, temos que:

$$n \times n = 625 \Leftrightarrow n^2 = 625 \Leftrightarrow n = \pm\sqrt{625} \Leftrightarrow n = \pm 25$$

Assim temos que o segundo número da linha é 25, pelo que todos os elementos desta linha são todos da forma ${}^{25}C_k$, e os elementos da linha anterior são da forma ${}^{24}C_k$.

Desta forma o quinto elemento da linha anterior, correspondente a $k = 4$, é:

$${}^{24}C_4 = 10\,626$$

Resposta: **Opção A**



4. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um aluno da academia, e os acontecimentos:

B : «O aluno estar inscrito em *ballet* clássico»

C : «O aluno estar inscrito em dança contemporânea»

Temos que $P(B) = 0,6$, $P(C \cap \overline{B}) = 0,25$ e $P(B|C) = 0,5$.

Assim, considerando $P(C) = k$ e organizando os dados numa tabela, obtemos:

- $P(B \cap C) = P(B|C) \times P(C) = 0,5 \times k$

Podemos assim, obter o valor de k :

$$P(C) = P(B \cap C) + P(\overline{B} \cap C) \Leftrightarrow k = 0,5k + 0,25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,5k = 0,25 \Leftrightarrow k = \frac{0,25}{0,5} \Leftrightarrow k = 0,5$$

- $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - k = 1 - 0,5 = 0,5$
- $P(B \cap \overline{C}) = P(B) - P(B \cap C) = 0,6 - 0,5 \times k = 0,6 - 0,5 \times 0,5 = 0,35$

	B	$\overline{B}$	
C	$0,5k$	$0,25$	k
$\overline{C}$	$0,35$		$0,5$
	$0,6$		1

Logo, a probabilidade de um aluno da academia, escolhido ao acaso, estar inscrito em *ballet* clássico, sabendo que não está inscrito em dança contemporânea, ou seja:

$$P(B|\overline{C}) = \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0,35}{0,5} = 0,7$$

5. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos ao diâmetro biparietal, e calculando as respetivas medidas estatísticas, verificamos que a média e a mediana são, respetivamente $\bar{x} \approx 8,44$ cm e $\tilde{x} = 8,48$ cm, pelo que a mediana dos diâmetros biparietais apresentados excede a respetiva média, arredondada às centésimas, em 0,04 cm.

Procedendo da mesma forma para os dados correspondentes do perímetro cefálico, verificamos que a amplitude da amostra dos perímetros cefálicos apresentados é 7,27 cm.

Com os dados das duas listas, podemos calcular o valor do coeficiente de correlação linear, cujo arredondamento às centésimas, é $r \approx 0,94$.

Usando a regressão linear anterior, representando a reta de regressão e usando-a para obter uma estimativa do perímetro cefálico à nascença, associado a diâmetro biparietal na trigésima quarta semana de gravidez de 8,50 cm, ou seja calculando a ordenada do ponto da reta que tem abcissa 8,5, obtemos o valor 34,54 cm.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ a)
- II $\rightarrow$ c)
- III $\rightarrow$ b)
- IV $\rightarrow$ a)



6. Como existem 10 algarismos diferentes para figurar em 4 posições, sendo a ordem relevante e podendo surgir repetições dos algarismos, o número de casos possíveis é $^{10}A_4 = 10^4$.

Como se pretende que o código um zero e a soma dos quatro algarismos seja ímpar, devemos considerar duas alternativas: o código ser formado pelo zero e três algarismos ímpares, ou então, pelo zero, por dois algarismos pares e um algarismo ímpar.

- Assim, o número de códigos formados pelo zero e por 3 dos 5 algarismos ímpares (1,3,5,7 e 9), considerando a ordem relevante e quatro posições diferentes a serem ocupadas pelo zero, é, $^5A_3 \times 4$.
- Para a outra alternativa, podemos seleccionar 2 dos 4 algarismos pares (2,4,6,8), sem considerar a ordem relevante e 1 dos 5 algarismos ímpares e o zero, e para cada conjunto de 4 algarismos calcular as ordenações diferentes possíveis, ou seja, $^4C_2 \times 5 \times 1 \times 4!$.

Desta forma, recorrendo à regra de LaPlace, a probabilidade na forma de fração irredutível, é:

$$\frac{{}^5A_3 \times 4 + {}^4C_2 \times 5 \times 1 \times 4!}{10^4} = \frac{12}{125}$$

7. Pela observação da equação da circunferência podemos verificar que as coordenadas do centro são $(-1,1)$ e que o respetivo raio é $\overline{AC} = \sqrt{4} = 2$.

Como $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$, temos que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \Leftrightarrow \cos \alpha \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 6 \Leftrightarrow \cos \alpha \times \|\overrightarrow{AB}\| \times 2 = 6 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{3}{\cos \alpha}$$

Como o triângulo ABC é isósceles (porque $\overline{CA} = \overline{CB}$), designado por M o ponto médio do lado $[AB]$, obtemos um triângulo $[ACM]$, retângulo em M , tal que:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AM}}{2} \Leftrightarrow \overline{AM} = 2 \cos \alpha$$

Logo, como $2\overline{AM} = \overline{AB}$ temos que:

$$2 \times 2 \cos \alpha = \frac{3}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

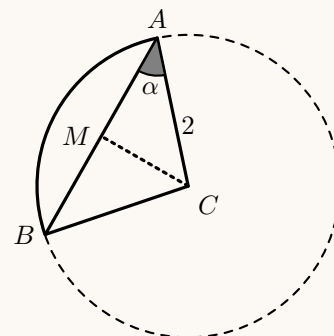
Desta forma, como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $\cos \alpha > 0$, ou seja $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, as amplitudes dos ângulos BAC e ABC são iguais, pelo que a amplitude do ângulo ACB é:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \widehat{ACB} = \pi \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \pi - \frac{2\pi}{6} \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \frac{2\pi}{3}$$

Logo o comprimento do arco AB é:

$$\widehat{ACB} \times \overline{AC} = \frac{2\pi}{3} \times 2 = \frac{4\pi}{3}$$



8. Como $\text{Im}(w) = \text{Re}(w)$, então w é um número complexo da forma $\rho e^{i(\frac{\pi}{4})}$.

Assim, como $i = e^{i(\frac{\pi}{2})}$ temos que:

$$iw^3 = e^{i(\frac{\pi}{2})} \times \left(\rho e^{i(\frac{\pi}{4})} \right)^3 = e^{i(\frac{\pi}{2})} \times \left(\rho^3 e^{i(3 \times \frac{\pi}{4})} \right) = (1 \times \rho^3) e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4})} = \rho^3 e^{i(\frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})} = \rho^3 e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

Ou seja, como $\text{Arg}(iw^3) = \frac{5\pi}{4}$, então o afixo de iw^3 pertence ao 3.º quadrante, pelo que, de entre as opções apresentadas, o único ponto que pode ser o afixo deste número é o ponto C .

Resposta: **Opção C**

9. Temos que:

- Como $i^{19} = i^{3+4 \times 4} = i^3 = -i$, então $z_1 = 2i^{19} = 2 \times (-i) = -2i$.
- $z_2 = \frac{-3+i}{1+i} = \frac{(-3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-3+3i+i-i^2}{1^2-i^2} = \frac{-3+4i-(-1)}{1-(-1)} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$

Assim, os números complexos z cujos afixos são equidistantes dos afixos de z_1 e de z_2 , são os que verificam a condição:

$$|z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow |z - (-2i)| = |z - (-1 + 2i)| \Leftrightarrow |z + 2i| = |z + 1 - 2i|$$

Desta forma, escrevendo w na forma algébrica, vem:

$$w = -\sqrt{2}k \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2}k \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2k}{2} - \frac{2}{2}i = k - ki$$

Substituindo, na condição de colinearidade, e resolvendo a equação, obtemos o valor de k :

$$\begin{aligned} |w + 2i| &= |w + 1 - 2i| \Leftrightarrow |k - ki + 2i| = |k - ki + 1 - 2i| \Leftrightarrow |k + i(-k + 2)| = |k + 1 + i(-k - 2)| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (-k + 2)^2} = \sqrt{(k + 1)^2 + (-k - 2)^2} \Leftrightarrow k^2 + (-k + 2)^2 = (k + 1)^2 + (-k - 2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^2 + k^2 - 4k + 4 = k^2 + 2k + 1 + k^2 + 4k + 4 \Leftrightarrow -4k - 4k - 2k = 1 + 4 - 4 \Leftrightarrow -10k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{10} \end{aligned}$$



10.

10.1. Como se pretende identificar uma reta perpendicular à reta DF , e os respetivos vetores diretores são perpendiculares, calculamos os produtos escalares entre os vetores diretores das retas de cada uma das hipóteses o vetor diretor da reta DF para encontrar um produtos escalares nulos e assim identificar direções perpendiculares à reta DF :

- $(1,1,-5) \cdot (5,0,-1) = 1 \times 5 + 1 \times 0 - 5 \times (-1) = 5 + 0 + 5 = 10$
- $(1,1,-5) \cdot (0,5,1) = 1 \times 0 + 1 \times 5 - 5 \times 1 = 0 + 5 - 5 = 0$

Assim, temos que apenas as retas cujas equações são apresentadas nas opções (B) e (D) são perpendiculares à reta DF , pelo que resta verificar a qual das duas retas pertence o ponto A , substituindo as suas coordenadas em cada uma das equações:

$$\begin{aligned} \bullet (4,2,0) &= (4,-3,-1) + k(0,5,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 + 0k \\ 2 = -3 + 5k \\ 0 = -1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 2 + 3 = 5k \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 1 = k \\ 1 = k \end{cases} \\ \bullet (4,2,0) &= (4,8,-2) + k(0,5,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 + 0k \\ 2 = 8 + 5k \\ 0 = -2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ -6 = 5k \\ 2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ -\frac{6}{5} = k \\ 2 = k \end{cases} \quad (\text{c. impossível}) \end{aligned}$$

Ou seja, $(4,2,0) = (4,-3,-1) + 1 \times (0,5,1)$, pelo que o ponto A pertence à reta definida pela equação $(x,y,z) = (4,-3,-1) + k(0,5,1), k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção B**

10.2. Como o ponto C pertence ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$, vamos determinar uma equação deste plano:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-2)^2 + z^2 &= (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 + z^2 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -8x + 16 - 4y + 4 &= -4x + 4 - 6y + 9 + 6z + 9 \Leftrightarrow -8x - 4y + 20 = -4x - 6y + 6z + 22 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -8x + 4x - 4y + 6y - 6z + 20 - 22 &= 0 \Leftrightarrow -4x + 2y - 6z - 2 = 0 \Leftrightarrow -2x + y - 3z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Como as retas BC e DF são paralelas, o vetor diretor da reta DF também é um vetor diretor da reta BC , que contém o ponto B , e por isso é definida pela equação vetorial:

$$(x,y,z) = (2,3,-3) + k(1,1,-5), k \in \mathbb{R}$$

E assim, um ponto genérico desta reta, tem coordenadas: $(2+k, 3+k, -3-5k)$.

Como o ponto C é a interseção da reta BC com o plano mediador, substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta BC na equação do plano mediador, obtemos o valor de k , correspondente ao ponto C :

$$-2(2+k) + 3 + k - 3(-3-5k) - 1 = 0 \Leftrightarrow -4 - 2k + 3 + k + 9 + 15k - 1 = 0 \Leftrightarrow 14k = -7 \Leftrightarrow k = -\frac{7}{14} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Desta forma, temos que as coordenadas do ponto C são:

$$\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right), 3 + \left(-\frac{1}{2}\right), -3 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2}, -3 + \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$



11. Designando por k o instante em causa, o número de gafanhotos nesse instante é $G(k)$ e metade deste número é $\frac{G(k)}{2}$. Passadas quatro semanas, o número de gafanhotos é $G(k+4)$, pelo que uma equação que permite determinar o instante é:

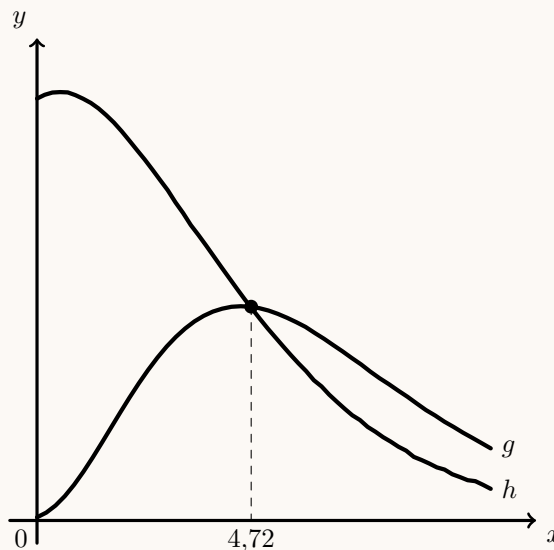
$$\frac{G(k)}{2} = G(k+4)$$

Desta forma, inserimos na calculadora gráfica a expressão da função $f(x) = 0,9e^{-0,6x}(x+0,5)^3$, e visualizamos os gráficos das funções:

- $g(x) = \frac{f(x)}{2}$
- $h(x) = f(x+4)$

reproduzidos na figura ao lado. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (arredondada às centésimas) da abcissa do ponto de interseção das funções g e h , a que correspondem o instante k :

$$k \approx 0,472$$



Assim, desde as zero horas do dia em que o enxame foi localizado até esse instante até ao instante em causa, decorreram 4,72 semanas, a que correspondem $4,72 \times 7 \approx 33$ dias.

12.

12.1. Calculando a ordenada do ponto B , temos:

$$y_B = f(0) = 3e^0 - 2e^{-0} = 3 \times 1 - 2 \times 1 = 3 - 2 = 1$$

A abcissa do ponto A é obtida como a solução da equação seguinte:

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\Leftrightarrow 3e^x - 2e^{-x} = 5 \Leftrightarrow 3e^x - 2 \times \frac{1}{e^x} = 5 \Leftrightarrow 3e^x - \frac{2}{e^x} - 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3(e^x)^2}{e^x} - \frac{2}{e^x} - \frac{5e^x}{2^x} = 0 \Leftrightarrow_{e^x \neq 0} 3(e^x)^2 - 2 - 5e^x = 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 5e^x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{2} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -\frac{1}{3}$$

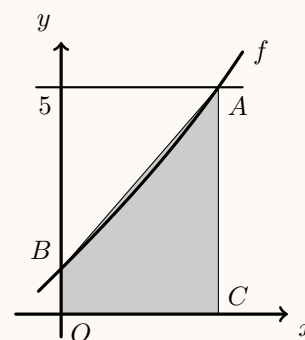
Como $y = e^x$, temos que:

$$e^x = 2 \vee \underbrace{e^x = -\frac{1}{3}}_{\text{Cond. impossível}} \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Assim, temos que as coordenadas dos pontos são $O(0,0)$; $B(0,1)$; $A(\ln 2, 5)$ e $C(\ln 2, 0)$.

Desta forma, calculando a área do trapézio, e escrevendo o resultado na forma $\ln(a)$, temos:

$$\begin{aligned} A_{[OCAB]} &= \frac{\overline{AC} + \overline{OB}}{2} \times \overline{OC} = \frac{y_A + y_B}{2} \times x_C = \\ &= \frac{1+5}{2} \times \ln 2 = 3 \ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8 \end{aligned}$$



12.2. As abcissas dos pontos de interseção do gráfico da função f com a reta, são soluções da equação:

$$f(x) = 3x + 4 \Leftrightarrow 3e^x - 2e^{-x} = 3x + 4 \Leftrightarrow 3e^x - 2e^{-x} - 3x = 4$$

Seja g a função definida por

$$g(x) = 3e^x - 2e^{-x} - 3x$$

Como a função g resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $]0,1[$, é contínua neste intervalo.

Como $g(0) < 4 < g(1)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]1,0[$ tal que $g(c) = 4$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $f(x) = 3x + 4$ no intervalo $]0,1[$, ou seja, que o gráfico da função f intersecta a reta em pelo menos um ponto, no intervalo $]0,1[$.

C.A.

$$g(0) = 3e^0 - 2e^{-0} - 3(0) = 3 \times 1 - 2 \times 1 - 0 = 1$$

$$g(1) = 3e - 2e^{-1} - 3 \approx 4,4$$

13. Temos que:

- Como a reta de equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico da função f , então $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \pm\infty$.

Com o domínio de f é $\mathbb{R}$, então $f(1)$ é um valor finito, pela que $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ou $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, o que significa que f não é contínua em $x = 1$, pelo que a afirmação **I.** é falsa.

- Como a função f é crescente em $] - \infty, 1[$ e em $]1, + \infty[$, temos que $f'(x) > 0$ em $\mathbb{R} \setminus 0$. Desta forma a equação $f'(x) = -1$ é impossível em $\mathbb{R} \setminus 0$, pelo que nenhuma reta de declive -1 é tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa diferente de 1, logo a afirmação **II.** é falsa.



14. Podemos observar que a 20.^a composição é delimitada por três elementos:

- A semicircunferência que também delimita o semicírculo inicial (de raio 1), cujo comprimento é:

$$\frac{2\pi \times 1}{2} = \pi$$

- O conjunto de semicircunferências acrescentadas - uma a cada composição, cujos raios são sucessivamente metade do raio semicircunferência acrescentada na composição anterior.

O comprimento de cada semicircunferência acrescentada são é uma progressão geométrica de razão

$$\frac{1}{2}, \text{ e cujo primeiro termo é } \frac{2\pi \times 1 \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Desta forma, temos que a sucessão dos perímetros de cada semicircunferência acrescentada é $\frac{\pi}{2} \times$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ e a soma dos 20 primeiros termos é:

$$S_{20} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1\,048\,575\pi}{1\,048\,576}$$

- Um segmento de reta, cujo comprimento é metade do comprimento do segmento de reta da composição anterior, e que por isso, os comprimentos são os termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e cujo primeiro termo é 1 (correspondente ao raio do semicírculo inicial), pelo que o comprimento do segmento de reta na 20.^a composição é:

$$1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

Assim, o perímetro da 20.^a composição geométrica desta sucessão, arredondado às centésimas, é:

$$\pi + \frac{1\,048\,575\pi}{1\,048\,576} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \approx 6,28$$

15. Como $f(0) = a(0)^3 + b(0) + c = c$, então o ponto do gráfico de f que tem abcissa zero, é o ponto de coordenadas $(0, c)$, pelo que a reta que intersesta o gráfico da função neste ponto, é definida pela equação $y = mx + c$, em que m é o declive.

Assim, as abcissas dos pontos de interseção do gráfico de f com a reta, são as soluções da equação $f(x) = mx + c$:

$$f(x) = mx + c \Leftrightarrow ax^3 + bx + c = mx + c \Leftrightarrow ax^3 + bx = mx \Leftrightarrow ax^3 + bx - mx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(ax^2 + b - m) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 + b - m = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 = m - b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{m - b}{a} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm \sqrt{\frac{m - b}{a}}$$

Desta forma, temos que:

- se $m = b$ ou $m - b < 0$ a única solução da equação é $x = 0$ e a reta não intersesta o gráfico da função em qualquer outro ponto;
- se $m - b > 0$, para além do ponto de abcissa zero, a reta intersesta o gráfico da função em pontos de abcissas simétricas, nomeadamente $\sqrt{\frac{m - b}{a}}$ e $-\sqrt{\frac{m - b}{a}}$.

