

Exame final nacional de Matemática A (2026, 2.ª fase)

Proposta de resolução



1. Recorrendo às propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a(b^2) = 16 \Leftrightarrow 2\log_a b = 16 \Leftrightarrow \log_a b = \frac{16}{2} \Leftrightarrow \log_a b = 8$$

E assim:

$$\log_a\left(\frac{a}{b}\right) = \log_a a - \log_a b = 1 - 8 = -7$$

Resposta: **Opção A**

2.

2.1. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{1+2\ln x}{x}\right)' = \frac{(1+2\ln x)' \times x - (1+2\ln x)(x)'}{x^2} = \\ &= \frac{(0+2(\ln x)') \times x - (1+2\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times x - 1 - 2\ln x}{x^2} = \frac{2 - 1 - 2\ln x}{x^2} = \frac{1 - 2\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{C. universal, } x \in \mathbb{R}^+} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2\ln x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \ln x \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f , no domínio da função derivada, vem:

x	0		$\sqrt{e}$	$+\infty$
$1 - 2\ln x$	n.d.	+	0	-
x^2	n.d.	+	+	+
f''	n.d.	+	0	-
f	n.d.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de f :

- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, \sqrt{e}]$;
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[\sqrt{e}, +\infty[$;
- tem um ponto de inflexão, cuja abcissa é $\sqrt{e}$.

2.2. Calculando o declive da reta r , temos:

$$m_r = f'(e) = \frac{1 + 2 \ln 2}{e} = \frac{1 + 2 \times 1}{e} = \frac{3}{e}$$

Como as retas r e s são perpendiculares o declive da reta s , é:

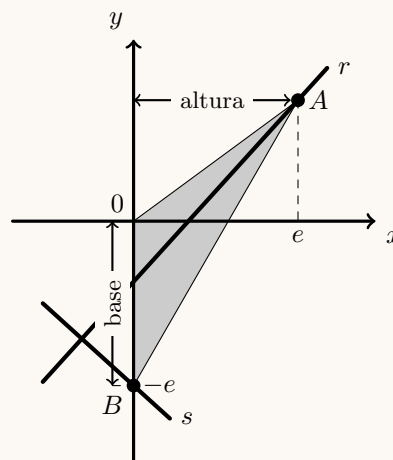
$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{3}{e}} = -\frac{e}{3}$$

Assim, como a reta s é definida por uma equação da forma $y = -\frac{e}{3}x + b$ e contém o ponto de coordenadas $(-3, 0)$, podemos calcular a ordenada, b , do ponto B :

$$0 = -\frac{e}{3} \times (-3) + b \Leftrightarrow 0 = e + b \Leftrightarrow b = -e$$

Desta forma, a área do triângulo $[AOB]$ é:

$$A_{[AOB]} = \frac{|y_B| \times x_A}{2} = \frac{|-e| \times e}{2} = \frac{e^2}{2}$$



3.

3. (AE 2018)

Como $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$, então temos que:

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,4 = 0,6$$

Resposta: **Opção B**

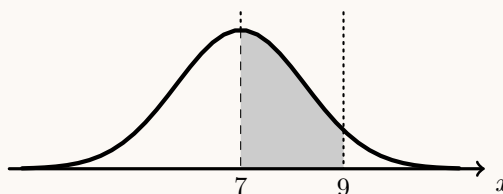
3. (AE 2023)

Seja X a variável aleatória que modela o preço da refeição na cantina.

Temos que:

- $P(X > 7) = 50\%$
- $P(X > 9) = 12\%$

Logo, vem que $P(7 < X < 9) = 50 - 12 = 38\%$.



Resposta: **Opção B**



4. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos às despesas com habitação, e noutra lista os dados relativos às despesas com alimentação, e calculando as respetivas medidas estatísticas, obtemos o valor $\sigma_x \approx 8,4$ para o desvio padrão populacional relativo às despesas com habitação e $\sigma_y \approx 5,9$ para as despesas com a alimentação.

Assim, podemos concluir que o desvio padrão das percentagens da despesa anual média associada à habitação é superior ao desvio padrão das percentagens da despesa anual média associada à alimentação.

Como em 2022/2023, a despesa anual média associada à alimentação foi 3121 euros, a que corresponde uma percentagem de 12,9%, o total da despesa média das famílias t , é:

$$\frac{t}{3121} = \frac{100}{12,9} \Leftrightarrow t = \frac{3121 \times 100}{12,9} \Leftrightarrow t \approx 24193,8$$

E assim, a despesa anual média associada à habitação, arredondada às unidades, ou seja, 39,0% do valor anterior, foi $0,39 \times 24193,8 \approx 9436$ euros.

Com os dados relativos às despesas com habitação na lista correspondente às abcissas dos pontos do diagrama de dispersão e os dados relativos às despesas com alimentação correspondentes às ordenadas dos pontos, podemos calcular o valor do coeficiente de correlação linear, cujo arredondamento às centésimas, é $r \approx -0,93$. Assim, o coeficiente de correlação linear entre as variáveis x e y , apresentadas na tabela, arredondado às centésimas, é $-0,93$.

Identificando o modelo de regressão linear que resulta da correlação anterior ($y = -0,648x + 35,006$), e calculando a ordenada do ponto da reta que tem abcissa 19,8, obtemos o valor $y = -0,648 \times 19,8 + 35,006 \approx 22,2$, ou seja, admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x , e com base nas estimativas dos parâmetros, arredondadas às milésimas, estima-se que a percentagem da despesa anual média associada à alimentação, em relação à despesa total anual média, em 2000, foi, aproximadamente, 22,2% (valor arredondado às décimas).

Logo, as correspondências corretas são:

- (a) $\rightarrow$ (3)
- (b) $\rightarrow$ (3)
- (c) $\rightarrow$ (1)
- (d) $\rightarrow$ (2)



5. Os números naturais, superiores a 50 000 com cinco algarismos diferentes e que são múltiplos de 5 podem ser divididos em dois grupos: os que têm 0 (zero) no algarismo das unidades e os que têm 5 no algarismo das unidades.

No caso do algarismo das unidades ser 5, existem 4 alternativas para a escolha do algarismo das dezenas de milhar (6, 7, 8 e 9), porque o número deve ser maior que 50 000 e este algarismo não pode ser 5 porque os algarismos devem ser todos diferentes.

Para os algarismos dos milhares, das dezenas e das centenas existem 8A_3 alternativas (que correspondem a todas as escolhas ordenadas de 3 algarismos escolhidos de entre o conjunto dos 10 algarismos, à exceção do 5 e do que foi escolhido antes).

Logo, o total de números deste grupo, é $4 \times {}^8A_3$.

				5
--	--	--	--	---

No caso do algarismo das unidades ser 0, existem 5 alternativas para a escolha do algarismo das dezenas de milhar (5, 6, 7, 8 e 9), porque o número deve ser maior que 50 000.

Para os algarismos dos milhares, das dezenas e das centenas existem 8A_3 alternativas (que correspondem a todas as escolhas ordenadas de 3 algarismos escolhidos de entre o conjunto dos 10 algarismos, à exceção do zero e do que foi escolhido antes).

Desta forma, o total de números deste grupo, é $5 \times {}^8A_3$.

				0
--	--	--	--	---

Assim, os números naturais, superiores a 50 000 com cinco algarismos diferentes e que são múltiplos de 5 são:

$$4 \times {}^8A_3 + 5 \times {}^8A_3 = 3024$$

6. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um cartão da caixa, e os acontecimentos:

T : «O cartão ter um número múltiplo de três»

I : «O cartão ter um número ímpar»

Temos que $P(T) = 0,625$ e $P(\bar{I}|\bar{T}) = \frac{1}{3}$.

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,625 = 0,375$;
- $P(\bar{I} \cap \bar{T}) = P(\bar{I}|\bar{T}) \times P(\bar{T}) = \frac{1}{3} \times 0,375 = 0,125$;
- $P(I \cap \bar{T}) = P(\bar{T}) - P(\bar{T} \cap \bar{I}) = 0,375 - 0,125 = 0,25$.

	T	$\bar{T}$	
I		0,25	
$\bar{I}$		0,125	
	0,625	0,375	

Assim, como $P(T \cap I) = P(I) - P(I \cap \bar{T})$, a probabilidade de selecionar aleatoriamente um cartão da caixa e ele estar numerado com um múltiplo de três ou com um número ímpar, na forma de fração irredutível, é:

$$\begin{aligned}
 P(T \cup I) &= P(T) + P(I) - P(T \cap I) = P(T) + P(I) - (P(I) - P(I \cap \bar{T})) = \\
 &= P(T) + P(I) - P(I) + P(I \cap \bar{T}) = P(T) + P(I \cap \bar{T}) = 0,625 + 0,25 = 0,875 = \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$



7.

7. (AE 2018)

Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)+5}{(n+1)+2} - \frac{3n+5}{n+2} = \frac{3n+3+5}{n+1+2} - \frac{3n+5}{n+2} = \frac{3n+8}{n+3} - \frac{3n+5}{n+2} = \\ &= \frac{(3n+8)(n+2) - (3n+5)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{3n^2+6n+8n+16 - (3n^2+9n+5n+15)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{3n^2+14n+16 - 3n^2-14n-15}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+3)(n+2) > 0$, e como o quociente de um (1) por um positivo $((n+3)(n+2))$, é sempre um valor positivo, temos que

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, u_n é uma sucessão **monótona crescente**.

7. (AE 2023)

Temos que a função derivada de f , é:

$$f'(x) = \left(x^2 e^x - \frac{1}{2}\right)' = (x^2 e^x)' - \left(\frac{1}{2}\right)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' + 0 = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (2 + x)$$

Assim, para o valor inicial $x_0 = -1$, o valor da primeira aproximação, x_1 , que resulta da aplicação do método de Newton-Raphson, é:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{(-1)^2 \times e^{-1} - \frac{1}{2}}{(-1) \times e^{-1} (2 + (-1))} \approx -1,359$$

8.

8.1. Observando a condição de cada uma das hipóteses, temos:

- $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} > 0$ porque o ângulo HAG é um ângulo agudo, logo as afirmações das opções (A) e (C) são falsas.
- Como $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{GB}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GF}$ então $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GF} = 0$ porque o ângulo BGF é um ângulo reto, pelo que podemos concluir que a afirmação da opção (B) é verdadeira e a afirmação da opção (D) é falsa.

Resposta: **Opção B**



- 8.2. Como a reta AB contém uma aresta do cubo, é perpendicular ao plano BCF , pelo que o vetor normal do plano, $(\vec{u}(-3, 6, -2))$, também é um vetor diretor da reta. Assim, uma equação vetorial da reta AB , é:

$$(x, y, z) = (-3, 5, 2) + k(-3, 6, -2), k \in \mathbb{R}$$

Desta forma, temos que um ponto genérico desta reta, tem coordenadas: $(-3 - 3k, 5 + 6k, 2 - 2k)$. Como o ponto B é a interseção da reta AB com o plano BCF , substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta AB na equação do plano BCF , obtemos o valor de k , correspondente ao ponto B :

$$\begin{aligned} -3(-3 - 3k) + 6(5 + 6k) - 2(2 - 2k) + 14 &= 0 \Leftrightarrow 9 + 9k + 30 + 36k - 4 + 4k + 14 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 49k + 49 &= 0 \Leftrightarrow k = -\frac{49}{49} \Leftrightarrow k = -1 \end{aligned}$$

Desta forma, temos que as coordenadas do ponto B são:

$$(-3 - 3(-1), 5 + 6(-1), 2 - 2(-1)) = (-3 + 3, 5 - 6, 2 + 2) = (0, -1, 4)$$

E assim, o volume do cubo é:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB}^3 = \left(\sqrt{(0-3)^2 + (-1-5)^2 + (4-2)^2} \right)^3 = \sqrt{9+36+4}^3 = \sqrt{49}^3 = 7^3 = 343$$

9. Como $[ABCD]$ é um retângulo, as retas AD e BC são paralelas, pelo que, como a reta BC é definida pela equação $y = -2x + 5$ o declive da reta AD é igual a -2 . Como esta reta contém o ponto A , de coordenadas $(2, 0)$ podemos calcular a ordenada na origem da reta AD , b , ou seja, a ordenada do ponto D :

$$0 = -2(2) + b \Leftrightarrow 4 = b$$

De forma análoga podemos determinar o declive m_{CD} , da reta CD , a partir do declive da reta BC , por serem retas perpendiculares:

$$m_{[CD]} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

E como a reta CD contém o ponto D , de coordenadas $(0, 4)$, é definida pela equação $y = \frac{1}{2}x + 4$. Desta forma podemos determinar as coordenadas do ponto C , como a interseção das retas CD e CB :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + 4 = -2x + 5 \\ y = \frac{x}{2} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + 2x = 5 - 4 \\ y = \frac{x}{2} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{2} = 1 \\ y = \frac{x}{2} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{2}{5} + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{21}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} + 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, temos que as coordenadas do ponto C são $\left(\frac{2}{5}, \frac{21}{5}\right)$.

10. Temos que:

- Como $f'(x) < 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, e $f(0) = 2$, então a função é decrescente em todo o domínio, pelo que $f(1) < f(0) \Leftrightarrow f(1) < 2$, pelo que a proposição **I.** é falsa.
- Como f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $[1, 2]$, e como $f(1) \times f(2) < 0$, o corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, garante que existe pelo menos um número real $c \in]1, 2[$ tal que $f(c) = 0$. Assim, como a função $\frac{1}{f}$ não está definida para os valores de c que verificam a condição $f(c) = 0$, e é garantida a existência de pelo menos um destes valores, a função não está definida para todos os valores reais, pelo que a proposição **II.** é falsa.



11. O afixo do número complexo iz é o transformado do afixo do número complexo z por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad. de centro na origem.

Assim, como o afixo do número complexo z pertence ao primeiro quadrante, o afixo de iz pertence ao segundo quadrante, pelo que, de entre as opções apresentadas, a única que pode ser o afixo de iz é o ponto B .

Resposta: **Opção B**

12. Considerando o número complexo z escrito na forma $a + bi$, como $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$, temos que o número complexo z é da forma $a - ai$, com $a \in \mathbb{R}$.

Desta forma, temos que:

$$z = \frac{w}{3-4i} \Leftrightarrow (a-ai)(3-4i) = w \Leftrightarrow w = 3a-4ai-3ai+4ai^2 \Leftrightarrow w = 3a-7ai+4a(-1) \Leftrightarrow w = -a-7ai$$

Logo, vem que:

$$\begin{aligned} |w| = 5 &\Leftrightarrow \sqrt{(-a)^2 + (-7a)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 49a^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{50a^2} = 5 \Rightarrow (\sqrt{50a^2})^2 = 5^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 50a^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = \frac{25}{50} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Assim, como $\operatorname{Re}(w) = -a$ e $\operatorname{Re}(w) < 0$, então $a > 0$, ou seja $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pelo que podemos concluir que:

$$w = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2}i$$

13.

13. (AE 2018)

Temos que:

$$f(x) = \sin(2x) + \cos x = 2\sin x \cos(x) + \cos x = \cos x(2\sin x + 1)$$

E assim,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

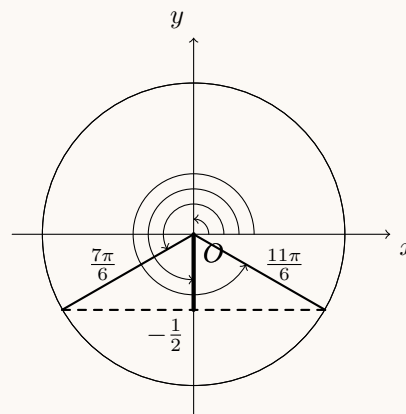
E assim, podemos observar que para $x \in [0, 2\pi[$, a equação $f(x) = 0$ tem 4 soluções:

- $x = \frac{\pi}{2}$, porque $\cos \frac{\pi}{2} = 0$;
- $x = \frac{3\pi}{2}$, porque $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$;
- $x = \frac{7\pi}{6}$, porque $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;
- $x = \frac{11\pi}{6}$, porque $\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Sendo $x = \frac{11\pi}{6}$ a maior solução em $[0, 2\pi]$.

Desta forma podemos observar que a equação tem 8 soluções no intervalo $[0, 4\pi]$, 12 soluções no intervalo $[0, 6\pi]$ e 20 soluções no intervalo $[0, 10\pi]$.

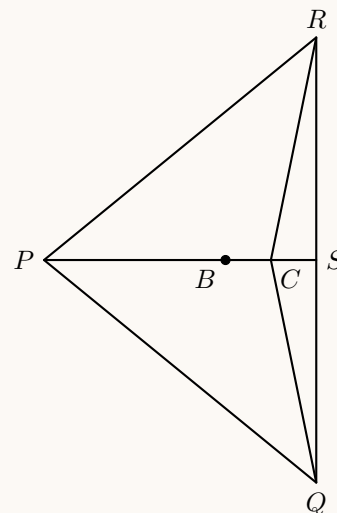
Como a maior solução da equação no intervalo $[0, 2\pi]$ é $x = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, a maior solução no intervalo $[0, 10\pi]$ é $x = 10\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{59\pi}{6}$, pelo que o menor valor de a para o qual a função f tem, exatamente, vinte zeros no intervalo $[0, a]$, é $a = \frac{59\pi}{6}$.



13. (AE 2023)

Temos que:

- como a distância do baricentro ao ponto médio de um lado do triângulo é metade da distância do baricentro ao vértice que se opõe ao lado anterior, então $\overline{BS} = \frac{\overline{PB}}{2}$;
- como C é o circuncentro do triângulo é equidistante dos vértices, então $\overline{PC} = \overline{RC}$;
- como $\overline{PS} = \overline{PB} + \overline{BS}$ e $\overline{PB} = 6$ então $\overline{PS} = 6 + \frac{6}{2} = 6 + 3 = 9$;
- como $\overline{PC} = \overline{PS} - \overline{CS}$ então $\overline{PC} = 9 - \overline{CS}$ e também $\overline{RC} = 9 - \overline{CS}$;
- como S é o ponto médio do segmento de reta $[QR]$ e $\overline{QR} = 6\sqrt{6}$ então $\overline{SR} = \frac{6\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$;
- como $\overline{PR} = \overline{PQ}$ então o triângulo $[PQR]$ é isósceles e o triângulo $[PSR]$ é retângulo em S , assim como o triângulo $[CSR]$.



Assim, pelo Teorema de Pitágoras, vem que:

$$\begin{aligned}\overline{RC}^2 &= \overline{CS}^2 + \overline{SR}^2 \Leftrightarrow (9 - \overline{CS})^2 = \overline{CS}^2 + (3\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow 81 - 2 \times 9 \times \overline{CS} + \overline{CS}^2 = \overline{CS}^2 + 9 \times 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 81 - 18\overline{CS} = 54 \Leftrightarrow 81 - 54 = 18\overline{CS} \Leftrightarrow 18\overline{CS} = 27 \Leftrightarrow \overline{CS} = \frac{27}{18}\end{aligned}$$

14. Como x é quociente entre o raio da base do cone e o apótema, ou seja $x = \frac{r}{a}$, o diâmetro da base do cone é $2r$.

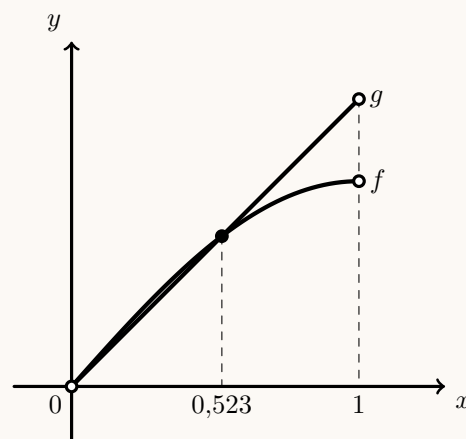
Assim, quando a distância entre os pontos A e B , pela superfície do cone, excede em 40% o diâmetro da base do cone, temos que

$$d(x) = 1,4 \times 2r \Leftrightarrow \frac{2r}{x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1,4 \times 2r \Leftrightarrow \frac{2r}{1,4 \times 2r} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1,4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x$$

Desta forma, para obter a solução da equação anterior inserimos na calculadora gráfica as expressões das funções $f(x) = \frac{1}{1,4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e $g(x) = x$, no domínio da função d .

Visualizamos os gráficos das funções reproduzidos na figura ao lado e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (arredondado às milésimas) da abscissa do ponto de interseção dos gráficos das duas funções, a que corresponde o quociente pretendido x_0 entre o raio da base e o apótema:

$$x_0 \approx 0,523$$



Assim, o valor do quociente entre o raio da base e o apótema quando a distância entre os pontos A e B , pela superfície do cone, excede em 40% o diâmetro da base do cone, arredondado às milésimas, é 0,523 .



15. Como a reta, de equação $y = -x + 2$, é assíntota ao gráfico da função f e o domínio de f é $\mathbb{R}^+$, temos que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-1)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 2$

Como o domínio da função g é $\mathbb{R}^+$, começamos por determinar o declive da assíntota não vertical do seu gráfico:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \frac{x+e^x}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x+e^x}{xe^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x}{xe^x} + \frac{e^x}{xe^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{e^x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = -1 + \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = -1 + 0 + 0 = -1 \end{aligned}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (-1)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{x+e^x}{e^x} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + x + \frac{x}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + x + \frac{x}{e^x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + 1 = 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 3 + \frac{+\infty}{+\infty} = 3 + \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (Indeterminação)} \end{aligned}$$

Usando a regra de l'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo $b = 3 + 0 = 3$ e assim, a equação reduzida da assíntota não vertical do gráfico de g é:

$$y = -x + 3$$

16. Designado por P o ponto de interseção da reta AB com o eixo Ox , temos que:

- $\overline{CO} = \overline{DO} = \overline{PO} = 1$;
- $\overline{CA} = \overline{CO} + \overline{OA} = 1 + \overline{OA}$;
- $\overline{AP} = \text{tg } \alpha$.

E assim pela definição de cosseno vem que:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{PO}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Desta forma, como os triângulos $[COD]$ e $[CAB]$ são semelhantes, porque têm um ângulo comum e os lados opostos a esse ângulo são paralelos, vem que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CO}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{1} = \frac{1 + \overline{OA}}{1} \Leftrightarrow \overline{AB} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha}$$

