

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2026, 2.ª fase)
Proposta de resolução



1. O cálculo da pontuação total do *Tour de France*, pode ser obtido através de $3 \times 24 + 2 \times 31 + 2 \times 45$.

Como os fatores 24, 31 e 45 estão nas células B2, C2 e D2, respetivamente, a fórmula inserida pelo Guilherme foi $= 3 \times B2 + 2 \times C2 + 2 \times D2$.

Resposta: **Opção B**

2. Como foram contabilizados $36 + 46 + 58 + 40 = 180$ votos, temos que qualquer um dos ciclistas obtém maioria absoluta de votos na primeira preferência se tiver, no mínimo, $\frac{180}{2} + 1 = 91$ votos.

Da continuação da aplicação do método descrito resulta que:

- o ciclista com mais votos na 1.ª preferência foi o Paulino (P) com $36 + 40 = 76$ votos (número inferior a 91), logo nenhum ciclista obteve a maioria absoluta como primeira preferência, pelo que se procede à reestruturação da tabela, eliminando o ciclista Ernesto (E) por ter sido o menos votado na primeira preferência, visto não ter obtido qualquer voto:

Preferências \ Votos	Votos			
	36	46	58	40
1.ª	P	V	A	P
2.ª	A	A	V	V
3.ª	V	P	P	A

- como as votações na 1.ª preferência se mantêm inalteradas na tabela reestruturada, continua a não existir nenhum ciclista com maioria absoluta dos votos na primeira preferência. Desta forma, procede-se à reestruturação da tabela, eliminando o ciclista Vitorino (V) por ser o menos votado na 1.ª preferência com apenas 46 votos:

Preferências \ Votos	Votos			
	36	46	58	40
1.ª	P	A	A	P
2.ª	A	P	P	A

- contabilizando os votos do ciclista Anacleto (A), temos $46 + 58 = 104$ votos na 1.ª preferência, pelo que este deve ser declarado como o escolhido.

Assim, temos que na aplicação do método descrito, o primeiro ciclista a ser eliminado foi E, e o segundo foi V.

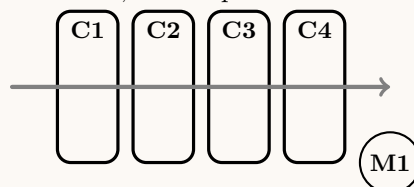
Após estas eliminações, o ciclista escolhido como preferido obteve 104 votos.

Logo, as correspondências corretas são:

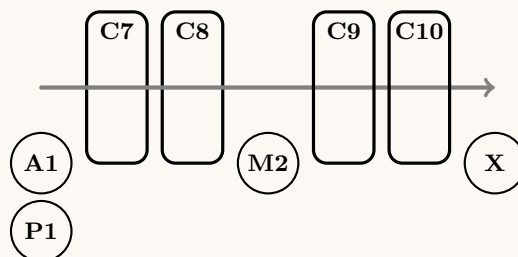
- (a) → (3)
- (b) → (2)
- (c) → (3)
- (d) → (2)

3. Aplicando o método descrito, de acordo com a posição dos marcadores, temos que:

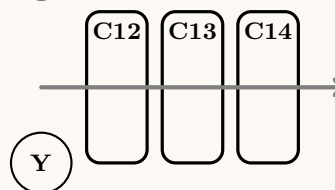
- Percorrendo a linha de cartões, partindo do cartão mais à esquerda, até se encontrar o primeiro marcador, observamos que os carros C1, C2, C3 e C4 serão atribuídos à Manuela, que colocou o primeiro marcador.



- Percorrendo a linha de caixas, novamente da esquerda para a direita, até se encontrar o segundo marcador de um dos outros dois voluntários, observamos que os carros C7, C8, C9 e C10 serão atribuídos ao voluntário que colocou o marcador X.



- Ao voluntário que resta, o que colocou o marcador Y, são atribuídos os carros à direita do seu segundo marcador, ou seja, os carros C12, C13 e C14.



- Os carros C5, C6 e C11 serão atribuídos por sorteio.

Assim, temos que:

Sem contabilizar os carros que serão atribuídos por sorteio, o número mínimo de carros atribuídos a um voluntário é três, ficando a Manuela responsável pelos carros C1, C2, C3 e C4.

Os carros C5 e C6 são dois dos carros sorteados entre os três voluntários.

Se o carro C9 for atribuído à Paula, então o número mínimo de carros atribuídos a essa voluntária, incluindo o carro C9, é quatro.

Logo, as correspondências corretas são:

- (a) → (2)
- (b) → (1)
- (c) → (1)
- (d) → (3)



4. Identificando os valores de que depende o cálculo de P , temos:

- $V_f = 5000$
- $i = 0,04$
- $n = 24$ (na proposta inicial)

Assim, temos que o valor de P , para cada valor de n , é dado por $P = \frac{5000 \times 0,04}{1 - (1 + 0,04)^{-n}}$.

Determinando o valor da prestação proposto ao André pelo gestor de conta, arredondado aos centimos, ou seja, o valor de P , relativa à proposta inicial de 24 prestações, temos:

$$P = \frac{5000 \times 0,04}{1 - (1 + 0,04)^{-24}} \approx 327,93 \text{ €}$$

Desta forma, como o André constatou que tinha disponibilidade financeira para pagar, mensalmente, uma prestação cujo valor poderia ir até ao dobro do valor da prestação apresentado, a prestação mensal poderia atingir o valor de $327,93 \times 2 = 655,86 \text{ €}$.

Assim, inserindo na calculadora gráfica a expressão

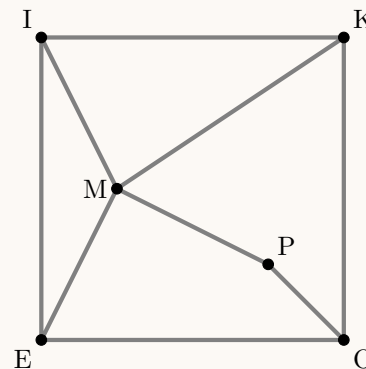
$$f(x) = \frac{5000 \times 0,04}{1 - (1 + 0,04)^{-x}}$$

e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de x que corresponde ao maior número de mensalidades em que a prestação não excede o valor de $655,86 \text{ €}$, que corresponde a 10 prestações.

x	$f(x)$
7	833,04806
8	742,63916
9	672,46496
10	616,45472
11	570,74519
12	532,76086

5. Observando os dados da tabela, podemos modelar por um grafo, em que cada vértice representa uma sessão, e em que cada aresta representa um par de sessões que não podem decorrer em simultâneo:

- aresta EO - Participação da Alice.
- aresta EI - Participação do Rui
- aresta EM - Participação do Rui
- aresta IK - Participação do César
- aresta IM - Participação do César e do Rui
- aresta KM - Participação do César
- aresta KO - Participação do Fábio
- aresta MP - Participação do Gil
- aresta OP - Participação da Júlia



Assim, podem ser organizados 3 blocos de sessões a realizar em simultâneo, ou seja, que não estão ligadas por uma aresta no grafo, nomeadamente:

- E, P e K
- I e O
- M



6.

6.1. Analisando cada uma das afirmações, temos que:

- Como

$$B(0) = 20 + 150(1 - e^{-0,02 \times 0}) = 20$$

então, no início do programa Voltas, 20 milhares de televisores estavam ligados no canal Biclá.

- Como

$$S(0) - S(180) = 40 - 12 = 28$$

então, o *share* do programa Voltas, desde o seu início até ao fim, diminuiu 28%.

- Como

$$B(30) = 20 + 150(1 - e^{-0,02 \times 30}) \approx 87,678$$

então, 30 minutos após o início do programa estavam 87 678 televisores ligados ao canal Biclá. Como o *share* nesta altura era um valor compreendido entre 21% ($S(90) = 12$) e 40% ($S(0) = 40$), o número de televisores ligados era um número compreendido entre $\frac{87\,678 \times 100}{21} \approx 417\,514$ e $\frac{87\,678 \times 100}{40} = 219\,195$, pelo que, de entre as opções apresentadas, o número 350 712 é o único que pode representar o total de televisores ligados, decorridos 30 minutos desde o início do programa Voltas.

- Como

$$B(180) = 20 + 150(1 - e^{-0,02 \times 180}) \approx 165,901$$

então, no final do programa estavam 165 901 televisores ligados ao canal Biclá, que correspondiam a 12% de todos os televisores ligados, porque $S(180) = 12$. Assim, o número de televisores ligados era $\frac{165\,901 \times 100}{12} \approx 1\,382\,508$, pelo que o número total de televisores ligados situava-se entre 1300 e 1400 milhares.

Logo, as correspondências corretas são:

- (a) → (1)
- (b) → (2)
- (c) → (2)
- (d) → (3)



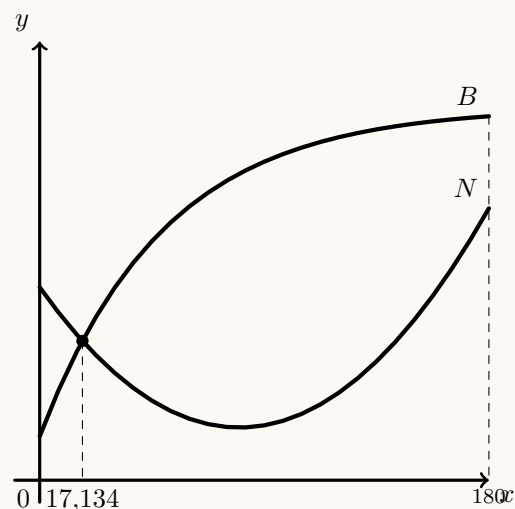
- 6.2. Começamos por determinar o momento, após o início da transmissão do programa Voltas, em que o número de televisores ligados nos dois canais foi igual. Assim, representamos os gráficos das funções relativas aos dois modelos e recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos.

Representando o gráfico da função $f(x) = 20 + 150(1 - e^{-0,02x})$, relativo ao modelo $B(t)$ e o gráfico da função $g(x) = 24 + 0,01(80 - x)^2$, relativo ao modelo $N(t)$, obtemos a representação gráfica reproduzida na figura ao lado.

Determinando a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos, $x \approx 17,134$ concluímos que foi no instante relativo a este valor que os dois canais tinham o mesmo número de televisores ligados.

Assim, o número de televisores ligados no canal Bicla decorridos 5 minutos após esse momento, ou seja, no instante $17,134 + 5 = 22,134$, era 73 653, porque

$$B(22,134) = 20 + 150(1 - e^{-0,02 \times 22,134}) \approx 73,653$$



7.

- 7.1. Observando a segunda barra do gráfico (relativa à classe $[5,25[$ e à localidade B) podemos verificar que o nível de aptidão para o ciclismo mais assinalado no boletim de inscrição pelas pessoas inscritas na localidade B e cuja idade pertence à classe $[5,25[$ foi **Intermédio**.

Somando as frequências relativas à parte superior das quatro barras da direita, obtemos o valor $5 + 0 + 17 + 9 = 31$, ou seja, o conjunto das pessoas inscritas nas duas localidades, o número de pessoas que tinham idade superior ou igual a 25 anos e assinalaram o nível Principiante é igual a **31**.

Determinando o número total de participantes das duas localidades, temos:

- Localidade A: $10 + 30 + 5 + 5 + 20 + 17 + 10 + 3 = 100$;
- Localidade B: $3 + 45 + 15 + 20 + 25 + 9 + 8 + 25 = 150$;

Desta forma, podemos concluir que a percentagem de pessoas que, na localidade A, assinalaram o nível Intermédio e cuja idade pertence à classe $[5,25[$ é igual à percentagem de pessoas que, na localidade B, assinalaram o mesmo nível de aptidão para o ciclismo e têm idade pertencente à mesma classe, de acordo com os cálculos na tabela ao lado.

Classe	A	%	B	%
$[5,25[$	30	$\frac{30}{100} \rightarrow 30\%$	45	$\frac{45}{150} \rightarrow 30\%$
$[25,45[$	20	$\frac{20}{100} \rightarrow 20\%$	20	$\frac{20}{150} \rightarrow 13,3\%$
$[45,65[$	10	$\frac{10}{100} \rightarrow 10\%$	8	$\frac{8}{150} \rightarrow 5,3\%$

Admitindo que as idades se distribuem uniformemente em cada classe, podemos considerar as marcas das três classes (15, 35 e 55) e calcular a média de idades dos participantes da localidade A, que assinalaram o nível Principiante:

$$\bar{x} = \frac{10 \times 15 + 5 \times 35 + 17 \times 55}{10 + 5 + 17} = 39,375$$

pelo que há 3 anos, a média correspondente era igual a $39,375 - 3 = 36,375$.

Logo, as correspondências corretas são:

- (a) $\rightarrow$ (2)
- (b) $\rightarrow$ (3)
- (c) $\rightarrow$ (1)
- (d) $\rightarrow$ (3)

- 7.2. Pela observação do gráfico, podemos concluir que 50% das pessoas representadas no gráfico têm x anos ou menos, e as restantes 50% têm 38 anos ou mais, ou seja, os valores centrais da lista ordenada das idades são x e 38:

$$\underbrace{25 \quad \dots \quad x \quad x}_{50\%} \quad \underbrace{38 \quad 38 \quad \dots \quad 44}_{50\%}$$

Logo, como a idade mediana é 34, temos que:

$$\frac{x + 38}{2} = 34 \Leftrightarrow x + 38 = 34 \times 2 \Leftrightarrow x = 68 - 38 \Leftrightarrow a = 30$$



8. Como o número de vendas totais da semana foi 72, e até ao penúltimo dia foram vendidas 62, no último dia foram vendidas $72 - 62 = 10$ bicicletas.

Organizando as informações numa tabela, e designando por n o número de bicicletas da categoria *Speed* e por $2n$ o número de bicicletas da categoria Elétrica que foram vendidas no último dia, temos:

Bicicletas	<i>Speed</i>	Elétrica	BMX	Dobrável
Vendas até ao penúltimo dia	18	16	16	12
Vendas no último dia	n	$2n$	$10 - 3n$	
Vendas totais, se $n = 1$	$18 + 1 = 19$	$16 + 2 \times 1 = 18$	$10 - 3 = 7$	
Vendas totais, se $n = 2$	$18 + 2 = 20$	$16 + 2 \times 2 = 20$	$10 - 6 = 4$	
Vendas totais, se $n = 3$	$18 + 3 = 21$	$16 + 2 \times 3 = 22$	$10 - 9 = 1$	
Vendas totais, se $n = 4$	$18 + 4 = 24$	$16 + 2 \times 4 = 24$	$10 - 12 = -2$	

Assim, temos que:

- se tivesse sido vendida 1 bicicleta da categoria *Speed*, a categoria Elétrica não poderia ser a moda do conjunto de dados.
- se tivessem sido vendidas 2 bicicletas da categoria *Speed*, esta categoria e a categoria Elétrica seriam ambas modas, e não apenas a categoria Elétrica.
- se tivessem sido vendidas 4 bicicletas da categoria *Speed*, teriam sido vendidas 8 da categoria Elétrica, totalizando mais de 10 bicicletas vendidas no último dia.

Logo, para que as condições enunciadas sejam cumpridas só pode ter sido vendida três (3) bicicleta da categoria *Speed* no último dia da semana, totalizando 21 da categoria *Speed* e 22 da categoria Elétrica e um máximo de 16 da categoria BMX ou um máximo de 13 na categoria Dobrável, sendo a única moda a categoria Elétrica.

Resposta: **Opção C**

9. Observando as bolas que estão na caixa, podemos concluir que os valores que a variável X pode assumir são 1, 2 ou 3, pelo que as distribuições de probabilidade das opções (A) e (D) não podem ser relativas à variável X .

Calculando as probabilidades de cada um destes três valores da variável, considerando as bolas apresentadas na figura, temos:

- $P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;
- $P(X = 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;
- $P(X = 3) = \frac{1}{6}$.

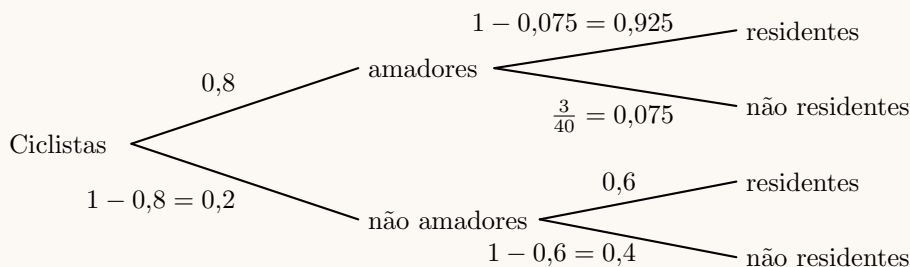
Pelo que a distribuição de probabilidades da variável X é a opção (B).

Resposta: **Opção B**



10.

10.1. Esquematizando os dados num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos ciclistas que participou na prova, e os acontecimentos:

A: "O ciclista ser amador";

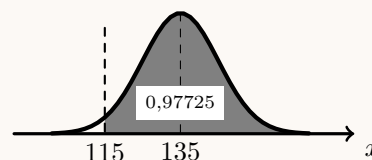
R: "O ciclista ser residente no concelho".

Temos, que o valor da probabilidade do ciclista escolhido ser residente no concelho, na forma de dízima, é:

$$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap \bar{A}) = 0,925 \times 0,8 + 0,6 \times 0,2 = 0,86$$

10.2. Recorrendo à calculadora gráfica, identificando a distribuição normal de média 135 e desvio padrão 10, obtemos o valor da probabilidade de uma pessoa ter demorado, mínimo, 115 minutos a completar a prova na forma de dízima, arredondado às centésimas:

$$P(X \geq 115) \approx 0,97725$$



Assim, como participaram na prova 1000 pessoas, o número esperado de pessoas que completaram a prova, no mínimo, em 115 minutos é:

$$1000 \times 0,97725 \approx 977$$

11. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 980 + 220 = 1200$;
- A proporção amostral: $\hat{p} = \frac{360}{1200} = 0,3$;
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1,960$.

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança, para a proporção dos habitantes daquela localidade que assistiu à passagem da Volta a Portugal em Bicicleta exatamente uma vez,

$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left[0,3 - 1,960\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{1200}}; 0,3 + 1,960\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{1200}} \right] \approx]0,27; 0,33[$$

