

## Exame final nacional de Matemática B (2025, 2.ª fase)

Proposta de resolução



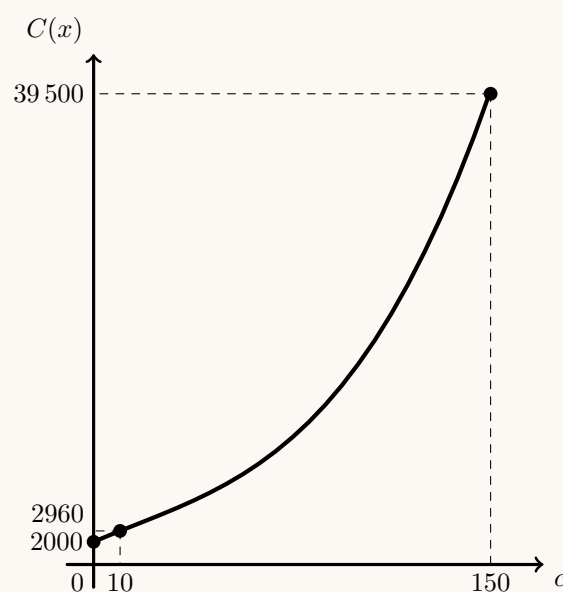
1.

1.1. Representando na calculadora gráfica o gráfico da função  $C(x)$  para  $0 \leq x \leq 150$ , e usando as funcionalidades da calculadora para determinar as imagens de objetos dados, obtemos:

- $C(0) = 2000$
- $C(150) = 39\,500$
- $C(10) = 2960$

Assim podemos concluir que:

- Se não for produzido qualquer unidade do produto ( $x = 0$ ), o custo de produção é 2000 euros, pelo que este é o valor dos custos fixos;
- pela análise do gráfico, podemos verificar que o valor máximo do custo de produção é 39 500 euros, se forem produzidas 150 unidades ( $x = 150$ );
- o custo associado à produção de 10 unidades ( $x = 10$ ) é 2960 euros, pelo que o custo de cada unidade é  $\frac{2960}{10} = 296$  euros.



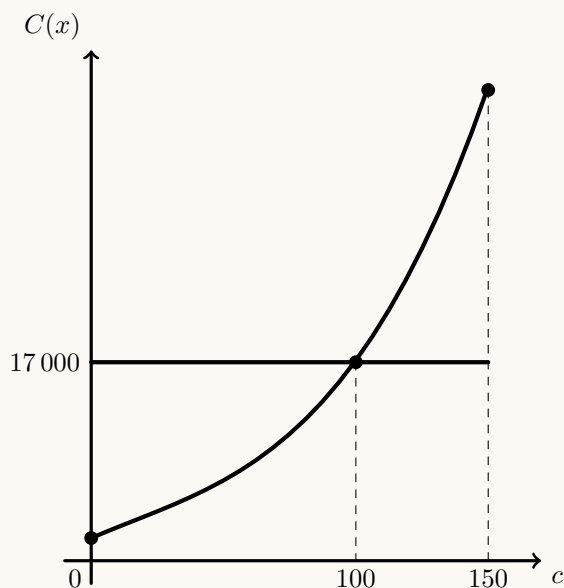
Logo, as correspondências corretas são:

- I → a)
- II → c)
- III → a)

- 1.2. Representamos na calculadora gráfica o gráfico da função  $C(x)$  para  $0 \leq x \leq 150$ , e a reta  $y = 17\,000$ . Depois, usando a função da calculadora para determinar valores das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor da abscissa do ponto de interseção dos dois gráficos:

$$x = 100$$

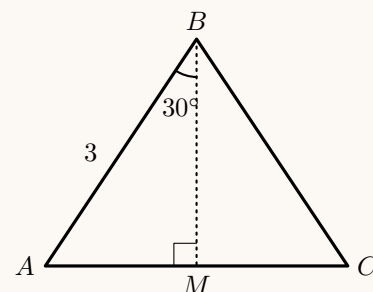
Assim podemos concluir que para que o custo total de produção seja de 17 000 euros, a empresa deve produzir 100 unidades do produto.



2.

- 2.1. Como  $[ABEF]$  e  $[BCDE]$  são retângulos geometricamente iguais, temos que:

- $\overline{AB} = \overline{BC}$  ;
- sendo  $M$  o ponto médio do segmento de reta  $[AC]$ , o triângulo  $[ABM]$  é retângulo em  $M$ ;
- $\hat{ABM} = \frac{\hat{ABC}}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$



Assim, usando a definição de seno, obtemos o valor de  $\overline{AM}$ :

$$\text{sen } \hat{ABM} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{AM}}{3} \Leftrightarrow 3 \times \text{sen } 30^\circ = \overline{AM}$$

Logo, temos que  $\overline{AC} = 2\overline{AM} = 2 \times 3 \times \text{sen } 30^\circ = 6 \times \text{sen } 30^\circ = 3$

Resposta: **Opção C**

- 2.2. Designado por  $a_2$  e  $a_3$  o comprimento do arco  $AC$  nos dois projetos, e como o comprimento do arco é dados por  $\frac{\alpha \pi r}{180}$  temos:

- Projeto P2 ( $r = \overline{AB} = 3$  m e  $\alpha = 60^\circ$ ):

$$a_2 = \frac{60\pi \times 3}{180} = \pi \text{ m}$$

- Projeto P3 ( $r = \overline{AE}$  e  $\alpha = 35^\circ$ ).

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 25 \underset{\overline{AE} > 0}{\Rightarrow} \overline{AE} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{AE} = 5$$

$$a_3 = \frac{35\pi \times 5}{180} = \frac{35\pi}{36} \text{ m}$$

Assim, como  $\frac{35\pi}{36} < \frac{36\pi}{36}$ , ou seja,  $\frac{35\pi}{36} < \pi$ , logo o arco  $AC$  é menor no projeto P3, pelo que deve ser este o projeto escolhido.



3.

- 3.1. Inserindo na calculadora gráfica a primeira lista com os dados relativos à pontuação média em Leitura e na segunda lista os dados relativos à pontuação média em Matemática, e determinando os parâmetros da equação da reta de regressão, obtemos que os valores de  $a$  e  $b$ , arredondados com três casas decimais:  $a \approx 1,358$  e  $b \approx -178,884$ .

Desta forma a equação da reta de regressão é  $y = 1,358x - 178,884$ , e como a pontuação média em Leitura dos alunos foi 495, a estimativa para a pontuação média em Matemática correspondente, arredondado às unidades, é:

$$y = 1,358(495) - 178,884 \approx 493$$

- 3.2. A percentagem de alunos que atingiram os níveis 2, 3 ou 4 de proficiência, ou seja, os que não alcançaram os níveis 5 ou 6 mas pontuaram acima do nível 1, é:

$$100 - 4,7 - 23,1 = 72,2\%$$

Como neste ano, o PISA foi aplicado a 6793 alunos, o número correspondente à percentagem calculada é:

$$6793 \times 0,722 \approx 4905$$

Resposta: **Opção B**

4. Como a Antónia escolhe dois dos cinco livros (três de literatura - L1, L2 e L3, e dois técnicos - T1 e T2), organizando todos os pares de livros que podem ser escolhidos, com recurso a uma tabela, e identificando os pares que têm, pelo menos um livro de literatura, temos:

|    | L1 | L2    | L3    | T1    | T2    |
|----|----|-------|-------|-------|-------|
| L1 | —  | L1+L2 | L1+L3 | L1+T1 | L1+T2 |
| L2 | —  | —     | L2+L3 | L2+T1 | L2+T2 |
| L3 | —  | —     | —     | L3+T1 | L3+T2 |
| T1 | —  | —     | —     | —     | T1+T2 |
| T2 | —  | —     | —     | —     | —     |

Assim, podemos observar que existem 10 pares de livros que podem ser escolhidos, dos quais 9 têm pelo menos um livro de literatura, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, obtemos  $\frac{9}{10}$ , pelo que a probabilidade na forma de percentagem, é:

$$p = \frac{9}{10} \times 100 = 90\%$$

5. Observando os dois gráficos, temos que:

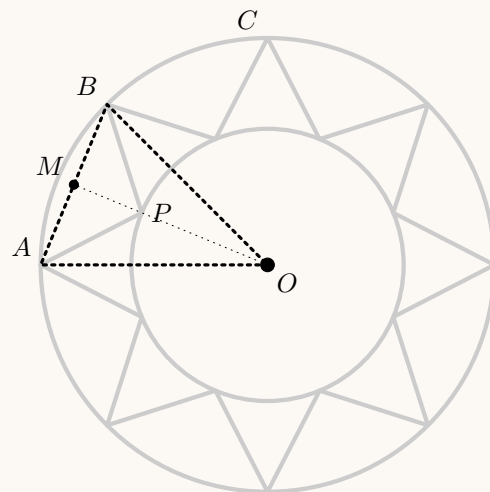
- o gráfico A não representa a função  $F$  porque a partir dos 60 segundos, a velocidade do robô é crescente e o gráfico A, entre os 60 e os 120 segundos, não apresenta uma taxa de variação instantânea sempre positiva; o período imediatamente a seguir aos 60 segundos no gráfico da função A traduz uma velocidade decrescente;
- o gráfico B também não representa a função  $F$  porque entre os 30 segundos e os 50 segundos, a taxa média de variação da função  $v$  é um número positivo, e o gráfico B representa uma taxa de variação instantânea negativa neste intervalo de tempo a que corresponderia uma taxa média de variação no intervalo  $[30,50]$  também negativa.



6.

6.1. Vamos começar por calcular o comprimento de cada um dos dezasseis segmentos de reta que compõem a linha poligonal, de acordo com os pontos indicados na figura ao lado:

- consideramos os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , vértices de um octógono de centro em  $O$ ;
- como  $\widehat{COA} = 90^\circ$  então  $\widehat{BOA} = \frac{\widehat{COA}}{2} = \frac{90}{2} = 45^\circ$
- consideramos o triângulo isósceles  $[OAB]$ , em que  $\overline{OA} = \overline{OB} = 10$  e o ponto médio  $M$  o ponto médio do segmento de reta  $[AB]$ ;
- como  $\widehat{BOA} = 45^\circ$  então  $\widehat{BOM} = \frac{\widehat{BOA}}{2} = \frac{45}{2} = 22,5^\circ$



Como o triângulo  $[BMO]$  é retângulo em  $M$ , usando as definições de seno e de cosseno, obtemos os valores de  $\overline{BM}$  e de  $\overline{OM}$ :

- $\cos \widehat{BOM} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos 22,5^\circ = \frac{\overline{OM}}{10} \Leftrightarrow 10 \times \cos 22,5^\circ = \overline{OM} \Rightarrow \overline{OM} \approx 9,2388$
- $\sin \widehat{BOM} = \frac{\overline{BM}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin 22,5^\circ = \frac{\overline{BM}}{10} \Leftrightarrow 10 \times \sin 22,5^\circ = \overline{BM} \Rightarrow \overline{BM} \approx 3,8268$

Considerando  $P$  o ponto da linha poligonal que pertence ao segmento de reta  $[OM]$ , temos que  $\overline{OP} = 6$  e que:

$$\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP} \approx 9,2388 - 6 \approx 3,2388$$

Como o triângulo  $[BPM]$  é retângulo em  $M$ , recorrendo ao teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{BP}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{PM}^2 \Rightarrow \overline{BP}^2 \approx 3,8268^2 + 3,2388^2 \xRightarrow{\overline{PM} > 0} \overline{BP} = \sqrt{5,1342} \Leftrightarrow \overline{BP} \approx 5,0134$$

Assim, o comprimento, em centímetros, arredondado às décimas, da linha poligonal, é:

$$5,0134 \times 16 \approx 80,2 \text{ cm}$$

6.2. Observando que o ponto  $A$  pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, verificamos que as duas coordenadas são iguais ( $A(c,c)$ ), e que são os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é 10 ( $\overline{OA} = 10$ ). Assim temos que:

$$c^2 + c^2 = \overline{AO}^2 \Leftrightarrow 2c^2 = 10^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{100}{2} \Leftrightarrow c^2 = 50 \xRightarrow{c > 0} c = \sqrt{50} \Leftrightarrow c \approx 7,1$$

E assim as coordenadas do ponto  $A$ , com os valores arredondados às décimas são  $(7,1; 7,1)$ .

7.

7.1. Recorrendo às duas fórmulas apresentadas podemos verificar que:

- a temperatura, em graus Fahrenheit, do congelamento da água, é  $F(0) = 1,8 \times 0 + 32 = 32$  ;
- a temperatura, em graus Kelvin, da ebulição da água, é  $K(100) = 100 + 273,15 = 373,15$ ;
- a temperatura, em graus Celsius, correspondente zero absoluto da escala Kelvin, é  $0 = C + 273,15 \Leftrightarrow -273,15 = C$ , ou, de forma equivalente,  $K(-273,15) = -273,15 + 273,15 = 373,15 = 0$ .

Logo, as correspondências corretas são:

- I  $\rightarrow$  c)
- II  $\rightarrow$  c)
- III  $\rightarrow$  a)



7.2. Calculando o valor da temperatura média da superfície do Sol em graus Celsius, temos:

$$5778 = C + 273,15 \Leftrightarrow 5778 - 273,15 = C \Leftrightarrow C = 5504,85$$

E assim, a temperatura correspondente em graus Fahrenheit, arredondado às unidades, é:

$$F = 1,8 \times 5504,85 + 32 = 9940,73 \approx 9941 \text{ } ^\circ\text{F}$$

8. Recorrendo à calculadora gráfica, para obter os produtos sucessivos do valor anterior por  $\frac{1}{4}$ , partindo da área do 1.º hexágono (1), e obter o valor da área do 7.º hexágono na forma de fração, temos:

- $A_{h_1} = 1$
- $A_{h_2} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
- $A_{h_3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
- $A_{h_4} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$
- $A_{h_5} = \frac{1}{64} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$
- $A_{h_6} = \frac{1}{256} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{1024}$
- $A_{h_7} = \frac{1}{1024} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4096}$

9. Calculando o número total de votos validamente expressos, temos:

$$1\,443\,683 + 2\,629\,597 + 1\,185\,867 + 418\,961 = 5\,678\,108$$

Assim, como 50% deste número é  $5\,678\,108 \times 0,5 = 2\,839\,054$ , o número de votos necessários para ter sido eleito na primeira volta (mais de 50%) era 2 839 055.

Como nenhum candidato conseguiu este número de votos foi necessário realizar uma segunda volta em que participaram os candidatos B e A, por serem os que tiveram o maior número de votos na primeira volta.

