

Exame final nacional de Matemática B (2025, Época especial)

Proposta de resolução



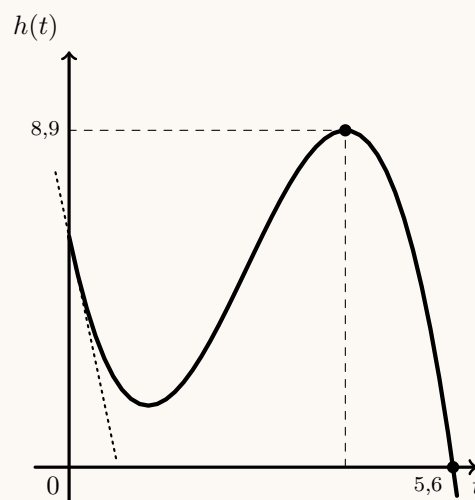
1.

1.1. Representando na calculadora gráfica o gráfico da função h , nos primeiros minutos, observando o gráfico, e calculando o zero e o máximo, podemos verificar que:

- o avião aterrou no solo, ou seja, a altura atinge o valor, no instante $t_1 \approx 5,6$ min;
- a altura máxima atingida pelo avião foi de 8,9 m;
- no instante $t = 0$ a função é decrescente, pelo que a variação instantânea é negativa.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ a)
- II $\rightarrow$ c)
- III $\rightarrow$ a)



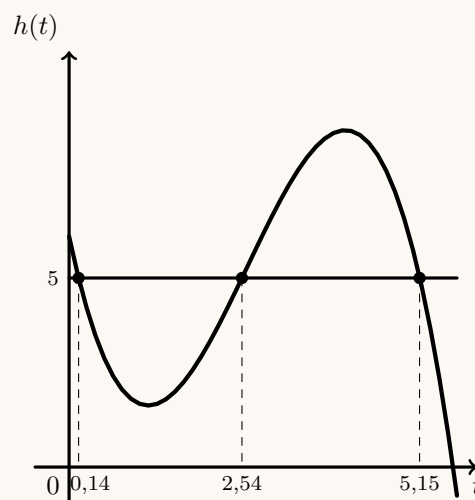
1.2. A taxa média de variação da altura atingida pelo avião entre os 2 e os 4 minutos após o início da avaliação deste voo, é:

$$TMV_{[2,4]} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{8,9 - 3,1}{2} = 2,9 \text{ m/min}$$

1.3. Representando na calculadora o gráfico da função h e a reta de equação $y = 5$ na janela compatível com os primeiros minutos, obtemos o gráfico se reproduz na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos os valores das abcissas (arredondados às centésimas) dos pontos do gráfico de h que têm ordenada 5, que correspondem aos três instantes, em que a altura atingida pelo avião foi igual a 5 metros:

$$t_1 \approx 0,14 \text{ min} ; t_2 \approx 2,54 \text{ min} \text{ e } t_3 \approx 5,15 \text{ min}$$



2.

- 2.1. Inserimos na calculadora gráfica, na primeira lista, os dados relativos ao número de utilizadores registados nas bibliotecas públicas e na segunda lista os dados relativos ao número de documentos requisitados. Determinando os parâmetros da equação da reta de regressão, $y = ax + b$, obtemos que os valores de a e b , com quatro casas decimais: $a \approx 0,4161$ e $b \approx 1497,7654$.

Desta forma a equação da reta de regressão é $y = 0,4161x + 1497,7654$, e como 9262 milhares de utilizadores registados corresponde a um valor de $x = 9262$, a estimativa do número de documentos requisitados nas bibliotecas públicas, em 1999, arredondado às unidades, é:

$$y = 0,4161 \times 9262 + 1497,7654 \approx 5352 \text{ milhares}$$

2.2. Temos que:

- Usando os dados relativos o número médio de utilizadores registados nas bibliotecas públicas para os anos indicados introduzidos na calculadora gráfica, e calculando a média, obtemos o valor aproximado de 5755 milhares de utilizadores por ano;
- determinando a mediana para os valores relativos ao número de documentos requisitados, obtemos o valor de 3756 milhares;
- em 2002 existiam 11 893 milhares de utilizadores registados e em 1990, apenas 2037 milhares; a que corresponde a seguinte percentagem, p , do valor corresponde a 2002:

$$\frac{p}{100} = \frac{2037}{11\,893} \Leftrightarrow p = \frac{2037 \times 100}{11\,893} \Leftrightarrow p \approx 17\%$$

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ c)
- II $\rightarrow$ b)
- III $\rightarrow$ b)

3.

- 3.1. Calculando a capacidade do reservatório, como o raio da semiesfera e da base do cilindro é $\frac{4}{2} = 2$ metros, temos:

- $V_{\text{Semiesfera}} = \frac{V_{\text{Esfera}}}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{4\pi \times 2^3}{6} \approx 16,755 \text{ m}^3$
- $V_{\text{Cilindro}} = A_{\text{base}} \times \text{altura} = \pi \times 2^2 \times 3 = 12\pi \approx 37,699 \text{ m}^3$
- $V_{\text{Total}} = V_{\text{Semiesfera}} + V_{\text{Cilindro}} \approx 16,755 + 37,699 \approx 54,454 \text{ m}^3$

Assim, metade da sua capacidade do reservatório corresponde a um volume de $\frac{54,454}{2} = 27,227 \text{ m}^3$.

Como $16,755 \text{ m}^3$ ficam armazenados na semiesfera, restam $27,227 - 16,755 = 10,472 \text{ m}^3$ no cilindro, pelo que, calculando a altura h relativamente ao cilindro, temos:

$$V_{\text{Cilindro}} = A_{\text{base}} \times \text{altura} \Leftrightarrow 10,472 = \pi \times 2^2 \times h \Leftrightarrow h = \frac{10,472}{4\pi} \Rightarrow h \approx 0,833 \text{ m}$$

Logo a altura da superfície da água no reservatório, arredondada às décimas, quando este está a metade da sua capacidade, é a soma do raio da semiesfera com a altura relativamente ao cilindro, ou seja, $2 + 0,833 \approx 2,8$ metros.



- 3.2. Como o triângulo $[VCA]$ é retângulo em C , e, relativamente ao ângulo CAV , o lado $[CA]$ é o cateto adjacente e o lado $[VA]$ é a hipotenusa, usando a definição de cosseno, e lembrando que $\overline{CA} = 2$ (porque é o raio da base do cilindro), obtemos o valor de $\overline{VA}$ arredondado com três casas decimais:

$$\cos \hat{CAV} = \frac{\overline{CA}}{\overline{VA}} \Leftrightarrow \cos 31^\circ = \frac{2}{\overline{VA}} \Leftrightarrow \overline{VA} = \frac{2}{\cos 31^\circ} \Rightarrow \overline{VA} \approx 2,333 \text{ m}$$

Assim, como $\overline{VA}$ é a medida da geratriz do cone, a área da cobertura do reservatório, ou seja, a área lateral do cone, arredondado às décimas, é:

$$A = \pi r g = \pi \times 2 \times 2,333 \approx 14,7 \text{ m}^2$$

- 3.3. Como uma das bases do cilindro pertence ao plano xOy , ou seja, ao plano de equação $z = 0$, a outra base do cilindro (que coincide com a base do cone) pertence ao plano paralelo a este, distanciada de 3 unidades, que corresponde à altura do cilindro, isto é ao plano $z = 3$.

Resposta: **Opção C**

- 3.4. Como o reservatório perde água, a altura da superfície da água diminui, pelo que a função f é decrescente, ou seja, os gráficos das opções (C) e (D) não representam a função f .

Como o débito é constante, no período de tempo em que a superfície da água está no cilindro, a variação é constante, mas quando a superfície da água varia ao longo da superfície esférica, como o raio da superfície da água diminui, a variação da altura aumenta. Assim, na fase final do esvaziamento deve haver uma aceleração na variação da altura, pelo que o único gráfico que pode representar a função f é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

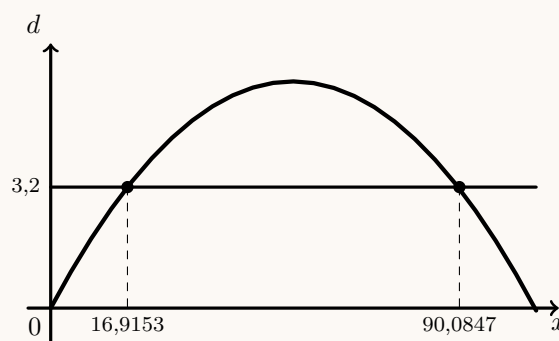
4. Observando o diagrama de Venn, temos que:

- $P(A \cap I) = 0,1 \Leftrightarrow P(A \cap I) > 0$, ou seja a probabilidade de selecionar ao acaso um aluno e este ser da escola A e ter 15 não é nula, logo existe pelo menos um aluno com estas características, logo a afirmação **I**) é verdadeira;
- $P(\bar{I} \cap A) = 0,025 \wedge P(I \cap \bar{A}) = 0,2 \Rightarrow P(I \cap \bar{A}) \neq P(I \cap \bar{A})$, ou seja a probabilidade de um aluno sorteado não ter 15 anos (equivalente, neste contexto a ter 16 ou 17) e ser da escola A não é igual à probabilidade do aluno sorteado ter 15 e não pertencer à escola A, logo a afirmação **II**) é falsa.

5. Representando na calculadora o gráfico da função d e a reta de equação $y = 3,2$ na janela compatível com os pontos em que o arco da ponte toca a superfície da água do rio, obtemos o gráfico se reproduz na figura seguinte.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos os valores das abscissas (arredondados com quatro casas decimais) dos pontos do gráfico de d que têm ordenada 3,2, que correspondem aos dois pontos em que distância vertical do arco à superfície do rio é 3,2 m, e por isso, os locais onde devem ser colocadas as bóias:

$$x_1 \approx 16,9153 \text{ m e } x_2 \approx 90,0847 \text{ m}$$



Assim, temos que a largura máxima do canal de passagem formado pelas bóias fixas no rio, arredondado às unidades, é $90,0847 - 16,9153 \approx 73$ metros.



6. Calculando o comprimento de cada elemento que delimita o perímetro da vista simplificada da faca, temos:

- Semicircunferência AC :
 - Raio: $\frac{\overline{AC}}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}$
 - Comprimento: $\frac{P_o}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2\pi \times 9}{2} = 9\pi \text{ cm}$
- Semicircunferência AB :
 - Raio: $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\frac{2}{3}\overline{AC}}{2} = \frac{\overline{AC}}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm}$
 - Comprimento: $\frac{P_o}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2\pi \times 6}{2} = 6\pi \text{ cm}$
- Linha poligonal $BEDC$:
 - $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = 18 - \frac{2}{3} \times 18 = 6 \text{ cm}$
 - $\overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DC} = 3 = 18 \text{ cm}$

Assim, perímetro da vista simplificada da faca, arredondado às décimas, é $9\pi + 6\pi + 18 \approx 65,1 \text{ cm}$.

7. No final de cada ano o capital acumulado pode ser calculado multiplicando o capital C por 1,012, ou seja, acumular a totalidade do capital e 0,012 de juros do capital:

$$C \times 1 + C \times 0,012 = C(1 + 0,012) = C \times 1,012$$

Assim, recorrendo à calculadora gráfica, para obter os produtos sucessivos do valor anterior por 1,012, partindo do capital inicial (3000 €), o valor do capital acumulado em cada ano até ao final do prazo (8 anos) etapa, temos:

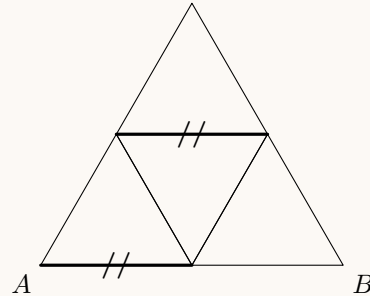
- Capital inicial: 3000€
- Final do 1.º ano: $3000 \times 1,012 = 3036 \text{ €}$
- Final do 2.º ano: $3036 \times 1,012 = 3072,432 \text{ €}$
- Final do 3.º ano: $3072,432 \times 1,012 \approx 3109,3012 \text{ €}$
- Final do 4.º ano: $3109,3012 \times 1,012 \approx 3146,6128 \text{ €}$
- Final do 5.º ano: $3146,6128 \times 1,012 \approx 3184,3722 \text{ €}$
- Final do 6.º ano: $3184,3722 \times 1,012 \approx 3222,5847 \text{ €}$
- Final do 7.º ano: $3222,5847 \times 1,012 \approx 3261,2557 \text{ €}$
- Final do 8.º ano: $3261,2557 \times 1,012 \approx 3300,3908 \text{ €}$

Desta forma, temos que o capital final acumulado, se o capital inicial aplicado for 3000 euros, arredondado às centésimas é 3300,39 €.



8. Observando que o lado de cada triângulo mede metade do comprimento do lado do triângulo anterior, temos que as medidas dos lados dos triângulos são:

- 1.º triângulo: $\overline{AB} = 1$
- 2.º triângulo: $\frac{1}{2}$
- 3.º triângulo: $\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$
- 4.º triângulo: $\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$
- 5.º triângulo: $\frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}$
- 6.º triângulo: $\frac{\frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{32}$
- 7.º triângulo: $\frac{\frac{1}{32}}{2} = \frac{1}{64}$
- 8.º triângulo: $\frac{\frac{1}{64}}{2} = \frac{1}{128}$
- 9.º triângulo: $\frac{\frac{1}{128}}{2} = \frac{1}{256}$
- 10.º triângulo: $\frac{\frac{1}{256}}{2} = \frac{1}{512}$



Desta forma, o perímetro do décimo triângulo, arredondado às milésimas, é:

$$3 \times \frac{1}{512} = \frac{3}{512} \approx 0,006$$

