

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2025, Época especial)
Proposta de resolução



1.

- 1.1. Como existem 580 alunos na escola, e votaram $406 + 29 = 435$, o número de alunos que não votou, ou seja, que se absteve, foi $580 - 435 = 145$.

Assim, temos que a percentagem, a , de alunos que não votaram, ou seja a taxa de abstenção, é:

$$\frac{a}{100} = \frac{45}{580} \Leftrightarrow a = \frac{145 \times 100}{580} \Leftrightarrow a = 25\%$$

Resposta: **Opção B**

- 1.2. Aplicando o método descrito, temos:

- Pontuação da plataforma A: $4 \times 146 + 3 \times 128 + 2 \times 67 + 4 \times 65 = 1362$
- Pontuação da plataforma B: $3 \times 146 + 4 \times 128 + 4 \times 67 + 3 \times 65 = 1413$
- Pontuação da plataforma C: $2 \times 146 + 2 \times 128 + 1 \times 67 + 1 \times 65 = 680$
- Pontuação da plataforma D: $1 \times 146 + 1 \times 128 + 3 \times 67 + 2 \times 65 = 605$

Desta forma podemos verificar que a plataforma B foi considerada a plataforma preferida pelos alunos da escola.

O número de votos obtido por cada plataforma na primeira preferência foi:

- Plataforma A: $146 + 65 = 211$
- Plataforma B: $128 + 67 = 195$
- Plataforma C: 0
- Plataforma D: 0

Assim, podemos verificar que a plataforma A foi a mais votada na primeira preferência, apesar de não ter sido eleita como a preferida dos alunos.

2. Procedendo à distribuição dos bens, aplicando o método descrito, temos:

	Joana	Rita
B1	44	46
B2	33	40
B3	23	14
Atribuição temporária	B3	B1 + B2
Total temporário	23	40 + 46 = 86
Bem usado no ajuste	B1	
Designação	B	A
Total final	$23 + \frac{x}{100} \times 44$	$86 - \frac{x}{100} \times 46$

Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz a partilha equilibrada, vem:

$$23 + \frac{x}{100} \times 44 = 86 - \frac{x}{100} \times 46 \Leftrightarrow 23 + \frac{x \times 44}{100} = 86 - \frac{x \times 46}{100} \Leftrightarrow 23 + 0,44x = 86 - 0,46x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,44x + 0,46x = 86 - 23 \Leftrightarrow 0,9x = 63 \Leftrightarrow x = \frac{63}{0,9} \Leftrightarrow x = 70$$

Assim, a partilha final dos blocos pelas duas alunas é:

- A Joana (B) fica responsável pelo bloco B3 e mais 70% do bloco B1;
- A Rita (A) fica responsável pelo bloco B2 e mais 30% do bloco B1.

Assim, temos que:

O bloco horário mais valorizado pela Joana e pela Rita foi o bloco B1 . O total de pontos do(s) bloco(s) horário(s) temporariamente destinado(s) à Rita foi 86 . Depois da partilha concluída, o bloco horário B1 foi repartido entre as duas alunas, ficando a Joana com a responsabilidade de assegurar 70% do mesmo.

Logo, as correspondências corretas são:

- I → a)
- II → c)
- III → a)
- IV → c)



3. Calculando os custos de subscrição de cada plataforma, em diferentes períodos trimestrais indicados no texto, temos:

Plataforma Período	Plataforma A	Plataforma B
18 meses	$5 + 8 \times 6 = 53 \text{ €}$	$V(12) + V(8) = 30 - 22 \times e^{-0,2 \times 12} + 30 - 22 \times e^{-0,2 \times 6} \approx 51 \text{ €}$
9 + 9 meses	$5 + 8 \times 3 = 29 \text{ €}$	$V(9) = 30 - 22 \times e^{-0,2 \times 9} \approx 26 \text{ €}$
12 + 6 meses	$5 + 8 \times 4 = 37 \text{ €}$	$V(6) = 30 - 22 \times e^{-0,2 \times 6} \approx 23 \text{ €}$
6 + 12 meses	$5 + 8 \times 2 = 21 \text{ €}$	$V(12) = 30 - 22 \times e^{-0,2 \times 12} \approx 28 \text{ €}$

Assim, temos que:

Se o João subscrever apenas a plataforma A para os 18 meses, o valor a pagar será 53 euros. Se subscrever apenas a plataforma B para os 18 meses, fazendo para isso duas subscrições, terá de pagar 51 euros.

Admita que o João opta por subscrever ambas as plataformas, subscrevendo cada uma delas uma única vez. Se subscrever a plataforma A por três trimestres e a plataforma B pelo tempo restante, terá de pagar $29 + 26 = 55$ euros.

O João concluiu que a solução mais económica passa por subscrever uma das plataformas durante 12 meses e, nos restantes meses, subscrever a outra, tendo de pagar um total de $21 + 28 = 49$ euros pelas subscrições nas duas plataformas.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ c)
- II $\rightarrow$ c)
- III $\rightarrow$ b)
- IV $\rightarrow$ b)

4. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, e selecionando o departamento D1 para iniciar o processo, obtemos um grafo que resulta da aplicação do método:

I : D1

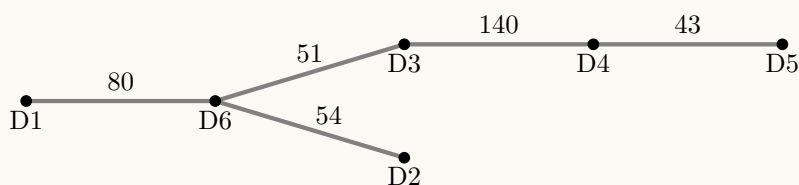
II : D1- D6 (80 m)

III : D6 - D3 (51 m)

IV : D6 - D2 (54 m)

V : D3 - D4 (140 m)

VI : D4 - D5 (43 m)



Desta forma, o comprimento mínimo, em metros, de cabo de fibra ótica que é necessário instalar. é:

$$80 + 51 + 54 + 140 + 43 = 368 \text{ m}$$



5.

5.1. Representando o modelo relativo ao número de utilizadores da *ArtificialThings* na calculadora gráfica e observando a sua representação em tabela, reproduzida na figura ao lado, podemos comparar a variação em cada um dos períodos apresentados:

- de 1 de abril a 1 de maio: $A(5) - A(4) \approx 4,92 - 4,11 \approx 0,81$
- de 1 de maio a 1 de junho: $A(6) - A(5) \approx 5,89 - 4,92 \approx 0,98$
- de 1 de junho a 1 de julho: $A(7) - A(6) \approx 7,05 - 5,89 \approx 1,16$
- de 1 de julho a 1 de agosto: $A(8) - A(7) \approx 8,44 - 7,05 \approx 1,39$

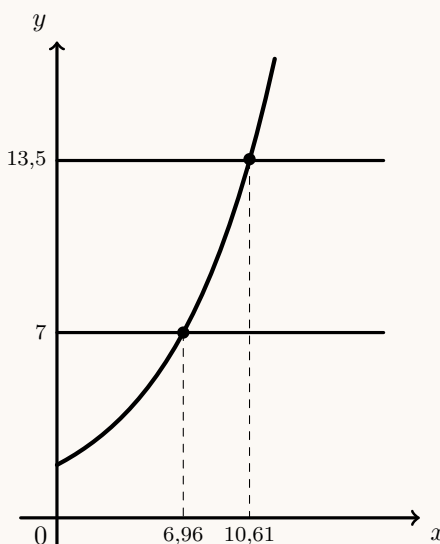
Assim podemos verificar que, de entre os períodos apresentados, aquele em que o crescimento foi mais acentuado foi de 1 de julho a 1 de agosto.

Resposta: **Opção D**

t	$A(t)$
1	2,39
2	2,87
3	3,43
4	4,11
5	4,92
6	5,89
7	7,05
8	8,44
9	10,11
10	12,10

5.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo do número de utilizadores da *ArtificialThings* ($y = 2e^{0.18x}$) e das retas horizontais correspondente aos 700 e 1350 utilizadores, ou seja, 7 centenas e 135 centenas, ($y = 7$ e $y = 13,5$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 18$, que se encontram reproduzidos na figura ao lado.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com cada uma das retas, obtemos o valores arredondados (às centésimas) das abcissas dos pontos de interseção, ou seja, o valor correspondente ao tempos em que o número de utilizadores eram 700 e 1350, ou seja, os pontos de coordenadas $(6,96; 7)$ e $(10,61; 13,5)$.



Assim, concluímos que foram necessários $10,61 - 6,96 = 3,65$ meses para que o número de utilizadores da *ArtificialThings* tivesse passado de 700 para 1350 utilizadores, a que correspondem $3,5 \times 30 \approx 110$ dias.



5.3. Representando os dois modelos na calculadora gráfica e observando a sua representação em tabela, podemos observar o número de utilizadores de cada plataforma nos períodos de tempo indicados:

t	$A(t)$	$B(t)$
0	2,00	3,00
1	2,39	3,38
2	2,87	3,81
3	3,43	4,30
4	4,11	4,85
5	4,92	5,47
6	5,89	6,16
7	7,05	6,95
8	8,44	7,84
9	10,11	8,83

t	$A(t)$	$B(t)$
10	12,10	9,96
11	14,49	11,23
12	17,34	12,66
13	20,76	14,28
14	24,86	16,10
15	29,76	18,15
16	35,63	20,46
17	42,66	23,07
18	51,07	26,01
19	61,14	29,33

Assim, temos que:

O número de utilizadores da *BeArtificial* em Avelares aumentou no intervalo de tempo considerado, sendo, no início do ano de 2023, igual a 3 centenas. O número de utilizadores das duas plataformas foi igual num determinado momento do mês de junho (porque no início do mês seguinte o maior número de utilizadores já era da plataforma A). No início do ano de 2024, a diferença entre o número de utilizadores das duas plataformas situava-se entre 400 e 499 ($1734 - 1266 \approx 468$) utilizadores.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ a)
- II $\rightarrow$ b)
- III $\rightarrow$ b)
- IV $\rightarrow$ c)

6.

6.1. Inserindo numa lista da calculadora as idades dos participantes do grupo A (15 15 17 17 20 20 23 25 25 29) e calculando a média e o desvio padrão, obtemos:

$$\bar{x} = 20,6 \text{ e } s \approx 4,5$$

Desta forma, o intervalo $]\bar{x}-s, \bar{x}+s[$ é aproximadamente o intervalo $]20,6-4,5; 20,6+4,5[=]16,1; 25,1[$, pelo que dos 10 participantes, apenas três deles têm idades que não pertencem ao intervalo (15, 15 e 29). Logo, são $10 - 3 = 7$ os que têm uma idade que pertence ao intervalo $]\bar{x}-s, \bar{x}+s[$.

Resposta: **Opção B**



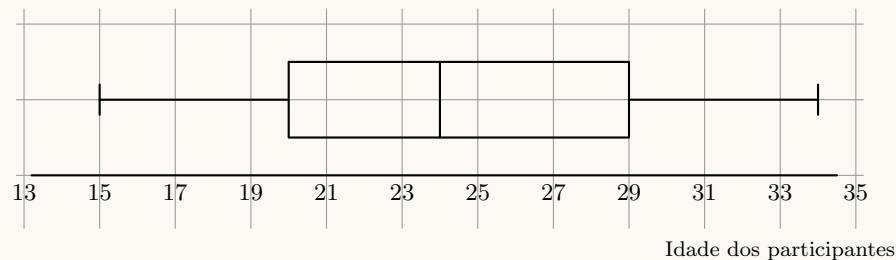
6.2. Acrescentando à lista das idades dos participantes do grupo A, anteriormente inserida na calculadora, as idades dos participantes do grupo B, obtemos a lista:

15 15 17 17 20 20 23 25 25 29 17 20 20 20 25 25 29 32 32 34 34 34

Calculando os extremos e os quartis, obtemos:

$$Min = 15 ; Q1 = 20 ; \tilde{x} = 24 ; Q3 = 29 \text{ e } Max = 34$$

E assim, o diagrama de extremos e quartis que traduza os dados referentes à idade, em anos, dos 22 participantes, é:



7. Observando os valores da tabela, podemos verificar que:

- como a frequência absoluta acumulada da primeira classe é $N_1 = n_1 = 3$, então o valor de p é:

$$p = N_1 + n_2 = 3 + 12 = 15$$

- como a primeira classe tem frequência relativa simples igual à frequência relativa acumulada, temos que $fr_1 = Fr_1 = 0,02$. Como a primeira e a terceira classe têm a mesma frequência absoluta simples (3), também têm a mesma frequência relativa simples, pelo que o valor de q é:

$$q = fr_3 = fr_1 = 0,02$$

- como as frequências absoluta simples e relativa simples da primeira classe são, respetivamente, 3 e 0,02, podemos calcular o número de pessoas que integrou o estudo, t :

$$\frac{t}{3} = \frac{1}{0,02} \Leftrightarrow t = \frac{1 \times 3}{0,02} \Leftrightarrow t = 150$$

Assim a frequência relativa acumulada da quinta classe, 0,94 corresponde a uma frequência absoluta acumulada de $0,94 \times 150 = 141$.

Logo o valor de r pode ser obtido subtraindo ao total de pessoas que integraram o estudo as 141 que pertencem 4 primeiras classes e as 3 pessoas da última classe:

$$r = t - N_4 - n_6 = 150 - 141 - 3 = 6$$

Assim, temos que:

O valor de p é 15, o valor de q é 0,02 e o valor de r é 6. No total, integraram este estudo 150 pessoas.

Logo, as correspondências corretas são:

- I → c)
- II → a)
- III → b)
- IV → b)

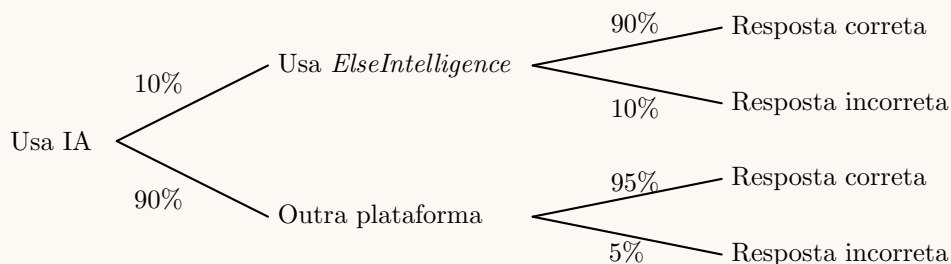


8.

8.1. Como a probabilidade de o José usar a IA num trabalho é 20%, ou seja, 0,2, a probabilidade de não usar é $1 - 0,2 = 0,8$. Assim a probabilidade de o José recorrer a plataformas de IA em exatamente três dos quatro trabalhos é:

$$\overbrace{0,8 \times 0,2 \times 0,2 \times 0,2}^{\text{IA nos 2.º, 3.º e 4.º}} + \overbrace{0,2 \times 0,8 \times 0,2 \times 0,2}^{\text{IA nos 1.º, 3.º e 4.º}} + \overbrace{0,2 \times 0,2 \times 0,8 \times 0,2}^{\text{IA nos 1.º, 2.º e 4.º}} + \overbrace{0,2 \times 0,2 \times 0,2 \times 0,8}^{\text{IA nos 1.º, 2.º e 3.º}} = 0,0256$$

8.2. Esquematizando os dados num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste no José formular uma pergunta numa plataforma de IA, e os acontecimentos:

E : "A plataforma selecionada é a *ElseIntelligence*"

C : "A resposta obtida estar correta"

Temos, que o valor da probabilidade de o José ter formulado a pergunta na plataforma *ElseIntelligence*, sabendo que a resposta obtida estava correta, na forma de fração irredutível, é:

$$P(E|C) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = \frac{P(E \cap C)}{P(C \cap E) + P(C \cap \bar{E})} = \frac{0,1 \times 0,9}{0,1 \times 0,9 + 0,9 \times 0,95} = \frac{2}{21}$$

9. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 250$
- A proporção amostral das pessoas que obtiveram respostas incorretas: $\hat{p} = \frac{50}{250} = 0,2$
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2,576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left[0,2 - 2,576\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{250}}; 0,2 + 2,576\sqrt{\frac{0,2(1-0,2)}{250}} \right] \approx]0,13; 0,27[$$

Assim, como o artigo de jornal referia uma proporção de 30% de respostas incorretas e esta proporção está fora do intervalo de confiança que tem um limite superior de 27%, a aluna tem razões fundamentadas para duvidar da publicação do jornal.

