

Exame final nacional de Matemática B (2025, 1.ª fase)

Proposta de resolução



1.

- 1.1. Como a função relaciona o tempo, em segundos, com a distância, em metros, e a calha tem 26,4 m, então o tempo que a esfera demora a percorrer a calha, é a solução positiva da equação $d(t) = 26,4$:

$$d(t) = 26,4 \Leftrightarrow 0,82t^2 = 26,4 \Leftrightarrow t^2 = \frac{26,4}{0,82} \Leftrightarrow t = \pm \sqrt{\frac{26,4}{0,82}}$$

Assim, o tempo que a esfera demora a percorrer a calha, em segundos, arredondado às décimas, é $\sqrt{\frac{26,4}{0,82}} \approx 5,7$.

- 1.2. Recorrendo à calculadora gráfica podemos verificar que:

- $d(1) = 0,82 \times 1^2 = 0,82$, pelo que ao fim de 1 segundo, a esfera percorreu 0,82 metros;
- $TMV_{[3;3,001]} = \frac{d(3,001) - d(3)}{3,001 - 3} = \frac{0,82 \times 3,001^2 - 0,82 \times 3^2}{3,001 - 3} \approx 4,92$, pelo que a taxa de variação instantânea da função d em $t = 3$ é aproximadamente 4,92 metros por segundo;
- $\frac{d(4)}{d(2)} = \frac{0,82 \times 4^2}{0,82 \times 2^2} = 4$, o que significa que nos primeiros 4 segundos, a esfera percorre o quádruplo do espaço que percorre nos primeiros 2 segundos do movimento.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ b)
- II $\rightarrow$ b)
- III $\rightarrow$ c)

- 1.3. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C , e, relativamente ao ângulo ABC , o lado $[AC]$ é o cateto oposto e o lado $[AB]$ é a hipotenusa, usando a definição de seno, obtemos o valor de $\overline{AC}$, arredondado às décimas :

$$\text{sen } \hat{ABC} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{sen } 7^\circ = \frac{\overline{AC}}{26,4} \Leftrightarrow \text{sen } 7^\circ \times 26,4 = \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 3,2 \text{ m}$$

2.

2.1. Vamos calcular o volume de três prismas octogonais, observando que

$$V = \text{Área da base} \times \text{altura} = \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema} \times \text{altura}$$

- Seja V_T o volume de cada uma das oito torres exteriores:

$$V_T = \frac{8 \times 3,4}{2} \times 4,1 \times 24 = 1338,24 \text{ m}^3$$

- Seja V_E o volume do prisma que delimita exteriormente a zona central:

$$V_E = \frac{8 \times 11,5}{2} \times (4,8 + 9) \times 20,5 = 13013,4 \text{ m}^3$$

- Seja V_I o volume do prisma que delimita interiormente a zona central:

$$V_I = \frac{8 \times 7,5}{2} \times 9 \times 20,5 = 5535 \text{ m}^3$$

Assim, o volume da estrutura do castelo, em metros cúbicos, arredondado às unidades, é:

$$V = V_E - V_I + 8 \times V_T = 13013,4 - 5535 + 8 \times 1338,24 = 18184,32 \approx 18184 \text{ m}^3$$

2.2. Como a origem do referencial coincide com o centro do prisma, o eixo Oz intersecta as bases do prisma nos seus centros, e a altura da torre é 24 metros, então o plano que contém a base superior do prisma é o plano de equação $z = \frac{24}{2} = 12$ e o plano que contém a base inferior do prisma é o plano de equação $z = -12$.

Resposta: **Opção B**

3. Inserindo na calculadora gráfica a primeira lista com os dados relativos aos gastos em publicidade e na segunda lista os dados relativos ao número de visitantes, e determinando os parâmetros da equação da reta de regressão, obtemos que os valores de a e b , arredondados às milésimas: $a \approx 3,629$ e $b \approx -6,714$.

Desta forma a equação da reta de regressão é $y = 3,629x - 6,714$, e como a um gasto em publicidade de 7,4 milhares de euros corresponde a um valor de $x = 7,4$, a estimativa do número de visitantes, em milhares, arredondado às unidades, associado a este gasto, é:

$$y = 3,629 \times 7,4 - 6,714 = 20,1406 \approx 20$$

4. Observando os dois gráficos, temos que:

- o gráfico A não representa a função F porque entre os 3 e os 7 minutos, a altura do *drone* manteve-se constante, ou seja, a taxa de variação instantânea foi nula, e o gráfico não apresenta uma função positiva neste intervalo de tempo;
- o gráfico B também não representa a função F porque durante os primeiros 3 minutos do voo, a altura do *drone* aumentou, ou seja, a taxa de variação instantânea foi positiva e o gráfico representa uma função negativa neste intervalo de tempo.



5.

5.1. Introduzindo na calculadora gráfica os dados relativos aos preços e às percentagens, usando os dados das percentagens como frequências, obtemos os seguintes valores:

- moda: $\hat{x} = 12$ (correspondente à maior percentagem (32%) de bilhetes vendida);
- mediana: $\tilde{x} = 12$ (correspondente a 50% dos bilhetes vendidos a 12 euros ou menos);
- média: $\bar{x} = 11,22$.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ a)
- II $\rightarrow$ b)
- III $\rightarrow$ b)

5.2. Antes do início do concerto, como estavam no recinto 600 pessoas, das quais 70% (ou seja, $600 \times 0,7 = 420$ pessoas) eram adultos, a probabilidade de selecionar ao acaso uma destas pessoas e ser um adulto era de

$$\frac{420}{600} = 0,7$$

Como até ao início do concerto, entraram apenas adultos e não saiu ninguém, e a probabilidade anterior se alterou para 0,76, designando por k o número de adultos que entrou no recinto após o momento anterior, temos que a probabilidade é agora:

$$\frac{420 + k}{600 + k} = 0,76$$

Assim, resolvendo a equação anterior, determinamos o número de pessoas que entrou no recinto após o momento anterior:

$$\begin{aligned} \frac{420 + k}{600 + k} = 0,76 &\Leftrightarrow 420 + k = 0,76(600 + k) \Leftrightarrow 420 + k = 456 + 0,76k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k - 0,76k = 456 - 420 \Leftrightarrow 0,24k = 36 \Leftrightarrow k = \frac{36}{0,24} \Leftrightarrow k = 150 \end{aligned}$$

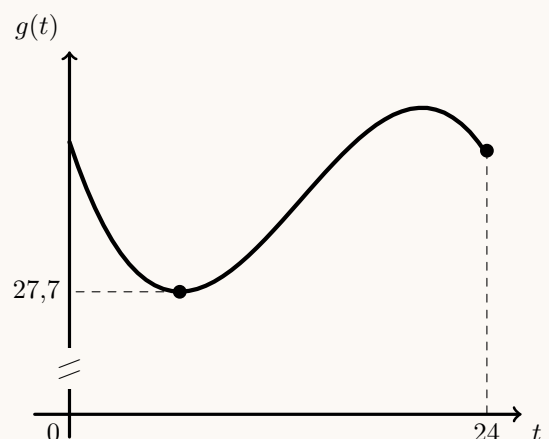
Logo, o número de espectadores que estavam no recinto no início do concerto é:

$$600 + 150 = 750$$

6.

6.1. Representando na calculadora gráfica o gráfico da função $g(t)$ para $0 \leq t \leq 24$, e usando a função da calculadora para determinar o mínimo da função obtemos o valor, aproximado, da percentagem mínima de humidade relativa, arredondada às unidades, naquele dia, de 28%.

Resposta: **Opção C**

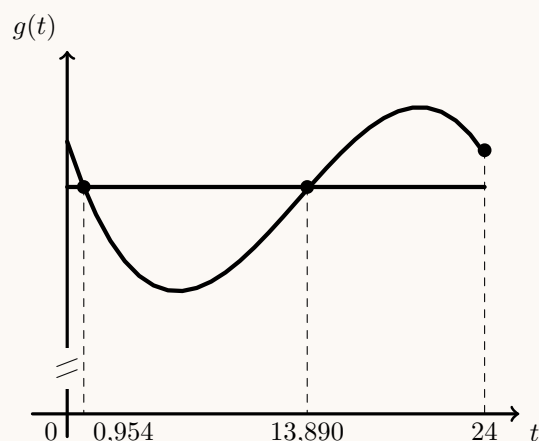


6.2. Representamos na calculadora gráfica o gráfico da função $g(t)$ para $0 \leq t \leq 24$, e a reta $y = 30$. Depois, usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (arredondado às milésimas) das abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos:

$$t_1 \approx 0,954 \text{ e } t_2 \approx 13,890$$

Pela observação podemos verificar que foi entre estes dois instantes que a humidade relativa foi inferior a 30%, ou seja, foi apenas neste intervalo de tempo que a condição apresentada foi respeitada, ou seja, num período com a duração:

$$13,890 - 0,954 = 12,936 \text{ horas}$$



Assim, nos restantes períodos daquele dia a condição indicada não foi respeitada, a que corresponde uma duração de $24 - 12,936 = 11,064$ horas.

Como 0,064 horas corresponde a $0,064 \times 60 = 3,84 \approx 4$ minutos, temos que, a duração aproximada do período de tempo em que não se verificou a condição referida, foi 11 horas e 4 minutos.

7. Calculando a área do vitral original, temos:

$$A_V = 37,4 \times 57,4 = 2146,76 \text{ cm}^2$$

Como a reprodução é semelhante, e a proporção das áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança (r), podemos determiná-la:

$$r^2 = \frac{614}{2146,76} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{614}{2146,76}} \Rightarrow r \approx 0,53$$

Desta forma, podemos obter as dimensões da reprodução, em centímetros, arredondados às unidades, a partir das dimensões do vitral original:

- comprimento: $57,4 \times 0,53 \approx 30 \text{ cm}$
- largura: $37,4 \times 0,53 \approx 20 \text{ cm}$

8. Aplicando o método descrito, a soma dos pontos de cada candidato, é:

- Pontuação do António: $5 \times 4 + 6 \times 4 + 4 \times 2 + 9 \times 1 = 61$
- Pontuação do Bruno: $5 \times 2 + 6 \times 1 + 4 \times 1 + 9 \times 4 = 56$
- Pontuação do César: $5 \times 1 + 6 \times 2 + 4 \times 4 + 9 \times 2 = 51$

Assim, o vencedor da eleição é o António, porque tem o maior número de pontos.



9. Recorrendo à calculadora gráfica, para obter os produtos sucessivos do valor anterior por $\frac{4}{3}$, partindo do perímetro da 1.^a etapa (3), e obter o valor exato do perímetro para cada etapa, arredondando às décimas o perímetro da 8.^a etapa:

- 1.^a etapa: Perímetro = $3 \times 1 = 3$
- 2.^a etapa: Perímetro = $3 \times \frac{4}{3} = 4$
- 3.^a etapa: Perímetro = $4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$
- 4.^a etapa: Perímetro = $\frac{16}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{9}$
- 5.^a etapa: Perímetro = $\frac{64}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{256}{27}$
- 6.^a etapa: Perímetro = $\frac{256}{27} \times \frac{4}{3} = \frac{1024}{81}$
- 7.^a etapa: Perímetro = $\frac{1024}{81} \times \frac{4}{3} = \frac{4096}{243}$
- 8.^a etapa: Perímetro = $\frac{4096}{243} \times \frac{4}{3} = \frac{16384}{729} \approx 22,5$

