

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2025, 1.ª fase)
Proposta de resolução



1.

- 1.1. Pela análise da tabela, podemos verificar que o número de votos que não foram atribuídos à lista C, é a soma dos votos atribuídos às listas A e B, ou seja, $18 + 51 = 69$ sendo este o número de casos possíveis, porque sabemos que o voto selecionado na foi atribuído à lista C.
Como se pretende calcular a probabilidade do voto ter sido atribuído à lista A, o número de casos favoráveis é 18, pelo que, recorrendo à Regra de LaPlace, a probabilidade é:

$$p = \frac{18}{69} = \frac{6}{23}$$

Resposta: **Opção A**

- 1.2. Aplicando o método descrito, até que seja possível determinar a atribuição de 5 mandatos à lista B, e um mandato adicional, porque sabemos que a Joana Almeida, candidata número 5 da Lista B, foi o penúltimo elemento a integrar a equipa de gestão, temos:

Lista	A	B	C
Número de votos	18	51	32
Divisão por 1	18	31	32
Divisão por 2	$\frac{18}{2} = 9$	$\frac{51}{2} = 25,5$	$\frac{32}{2} = 16$
Divisão por 3	$\frac{18}{3} = 6$	$\frac{51}{3} = 17$	$\frac{32}{2} \approx 10,7$
Divisão por 4		$\frac{51}{4} \approx 12,8$	$\frac{32}{4} = 8$
Divisão por 5		$\frac{51}{5} = 10,2$	
Divisão por 6		$\frac{51}{6} \approx 8,5$	

Desta forma, pela análise dos quocientes obtidos, podemos verificar que se, a Joana Almeida, candidata número 5 da Lista B, foi o penúltimo elemento a integrar a equipa de gestão (o último foi o candidato número 2 da Lista A), então o número de elementos da equipa de gestão é 10, sendo a equipa constituída por:

- 2 elementos da Lista A;
- 5 elementos da Lista B;
- 3 elementos da Lista C.

2. De acordo com o método descrito, e com os dados do enunciado, temos que:

Primeira volta					
Ordem	Lurdes	Carla	José	Edgar	Paula
Retificou		✓	✓	✓	✓
Parcela atribuída					✓

(Como a Paula era a última prima, e retificou a divisão, a parte da piza foi-lhe entregue, e assim, começou novamente a Lurdes na segunda volta)

Segunda volta				
Ordem	Lurdes	Carla	José	Edgar
Retificou			✓	
Parcela atribuída			✓	

(Na segunda volta o José foi o único primo que retificou, pelo que lhe foi entregue a parte da piza, e assim, começa a terceira volta o Edgar)

Terceira volta			
Ordem	Edgar	Lurdes	Carla
Retificou		✓	✓
Parcela atribuída			✓

(Como a Carla era a última prima, e retificou a divisão, a parte da piza foi-lhe entregue, e assim, começou novamente o Edgar na quarta volta)

Quarta volta		
Ordem	Edgar	Lurdes
Retificou	Sem informação	
Parcela atribuída	Sem informação	

Assim, temos que:

O José ficou com a sua parte da piza na segunda volta. A Lurdes iniciou duas voltas.

O número de primos que não iniciaram qualquer volta foi igual a três (a Carla, o José e a Paula). O Edgar foi um dos primos que, juntamente com a Lurdes, obtiveram a sua parte da piza na última volta.

Logo, as correspondências corretas são:

- I → b)
- II → a)
- III → c)
- IV → a)



3. Pela observação do grafo, podemos observar que:

- Para dar início à tarefa T_5 , o Edgar terá que ter concluído as tarefas T_2 , T_4 e T_3 ; como o início tarefa T_2 implica a concretização da tarefa T_1 , a conclusão desta última também é necessária para dar início à tarefa T_5 .
- Para dar por concluída a tarefa T_3 , são necessários, no mínimo, 4 dias para concluir a tarefa T_4 e mais 1 dia para a conclusão da própria tarefa T_3 .
- Os encadeamentos de precedências que geram períodos de trabalho mais longos, são as tarefas $T_1 \rightarrow T_6$, num total de $2 + 4 = 6$ dias, e as tarefas $T_4 \rightarrow T_3 \rightarrow T_5$, num total de $4 + 1 + 1 = 6$ dias.
- Como os encadeamentos que implicam um maior tempo de concretização (6 dias), incluem grupos de tarefas que podem ser concretizadas em simultâneo, tal como a sequência $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_5$, que demora $2 + 3 + 1 = 6$ dias, concluímos que todas as tarefas podem ser desempenhadas num período de 6 dias.

Assim, temos que:

Antes de dar início à tarefa T_5 , o Edgar tem de concluir, no mínimo, 4 tarefas.

Até dar por concluída a tarefa T_3 , são necessários, no mínimo, 5 dias. Para concluir todas as tarefas, no número mínimo de dias, o Edgar tem de iniciar, nomeadamente, as tarefas T_2 e T_6 em simultâneo. O Edgar necessita, no mínimo, de 6 dias para concretizar todas as tarefas.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ b)
- II $\rightarrow$ c)
- III $\rightarrow$ a)
- IV $\rightarrow$ b)

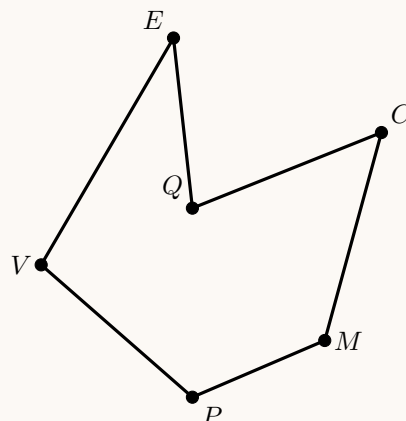


4. Organizando todas as distâncias correspondentes às arestas do grafo, de acordo com os dados das duas figuras, temos:

- CE : 748 m
- CQ : 355 m
- CM : 382 m
- EQ : 350 m
- EV : $450 + 800 = 1250$ m
- PV : 550 m
- PQ : $700 + 400 = 1100$ m
- PM : $700 + 400 + 160 = 1260$ m

Assim, verificamos que a menor distância entre os seis locais, corresponde à aresta EQ , e podemos construir o grafo da figura seguinte, e identificar o percurso que a Leonor definiu:

- I - Aresta CQ - distância: 355 m
(menor distância a partir da casa da Leonor)
- II - Aresta QE - distância: 350 m
- III - Aresta EV - distância: 1250 m
(não se considera a aresta EC , porque fecharia o percurso)
- IV - Aresta VP - distância: 550 m
- V - Aresta PM - distância: 1260 m
(não se considera a aresta PQ , porque fecharia o percurso)
- VI - Aresta MC - distância: 382 m



Assim, um possível percurso definido pela Leonor para a sua caminhada, a partir da sua casa é:

$$C \rightarrow Q \rightarrow E \rightarrow V \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow C$$

(O percurso $C \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow V \rightarrow E \rightarrow Q \rightarrow C$, também satisfaz as condições do enunciado).

5.

- 5.1. De acordo com o modelo apresentado, a percentagem de clientes que atribuíram, pelo menos, 4 estrelas à experiência até ao início de março de 2022 é $E(2) \approx 11,9$.

Assim, dos 600 clientes que tinham avaliado a experiência, o número correspondente a 10% é: $600 \times 0,10 \approx 60$.

Resposta: **Opção A**



- 5.2. Pela análise da tabela podemos verificar no momento desta atualização havia um total de $50 + 150 + 200 + 770 + 430 = 1600$ avaliações, em que $770 + 430 = 1200$ eram avaliações de pelo menos, 4 estrelas.

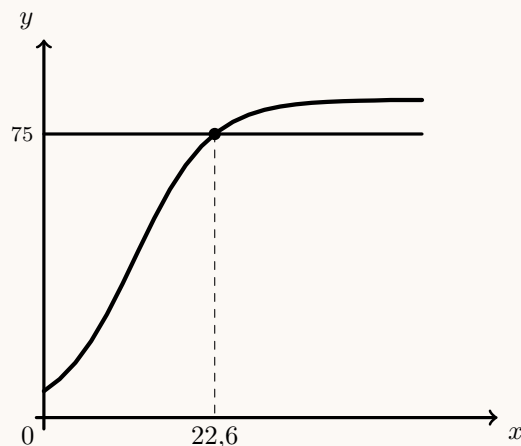
Assim, calculando a percentagem, p , correspondente ao momento da atualização, temos:

$$\frac{p}{100} = \frac{1200}{1600} \Leftrightarrow p = \frac{1200 \times 100}{1600} \Leftrightarrow p = 75$$

Assim, vamos usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta $y = 75$. Representamos o gráfico da função $f(x) = \frac{84}{1 + 11e^{-0,2x}}$ e a reta $g(x) = 75$, numa janela ajustada, e obtemos o valor, arredondado às décimas, da abscissa do ponto de interseção:

$$x \approx 22,6$$

Assim, temos que o momento em que ocorreu a atualização foi 22,6 meses após o início do ano de 2022, ou seja, 1 ano e 10,6 meses após esta data, a que corresponde o mês de novembro de 2023.



- 5.3. De acordo com os dados do enunciado, podemos observar que:

- Pela observação da representação gráfica do modelo E (figura do item anterior), verifica-se um crescimento da percentagem de clientes que atribuíram, pelo menos, 4 estrelas à experiência.
- Recorrendo à calculadora gráfica verifica-se que $E(0) = 7$ e pela observação do gráfico sabemos que $N(0) = 40$, pelo que no início do ano de 2022 ($t = 0$), a percentagem de clientes que atribuíram, pelo menos, 4 estrelas à experiência ($E(0)$) era menor que percentagem de clientes que lhe atribuíram 3 estrelas ($N(0)$).
- Como as duas percentagens eram iguais ao fim de 4 meses e alguns dias após o início do ano de 2022, porque $E(4,25) = N(4,25)$, então o modelo E passou a assumir valores superiores durante o mês de maio de 2002.
- Como com o passar do tempo o modelo E , relativo a avaliações de 4 ou mais estrelas, tende para 84 e o modelo N , relativo a avaliações de 3 estrelas, tende para 10, então a percentagem de avaliações de 2 ou menos estrelas tende $100 - 84 - 10 = 6\%$.

Assim, temos que:

Nos primeiros dois anos, a percentagem de clientes que atribuíram, pelo menos, 4 estrelas à experiência é crescente.

No início do ano de 2022, a percentagem de clientes que atribuíram, pelo menos, 4 estrelas à experiência era inferior à percentagem de clientes que lhe atribuíram 3 estrelas, verificando-se que o contrário ocorreu pela primeira vez no decorrer do mês de maio de 2022.

Com o passar do tempo, a percentagem de clientes que atribuíram, no máximo, 2 estrelas à experiência tende para 6%.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ a)
- II $\rightarrow$ c)
- III $\rightarrow$ b)
- IV $\rightarrow$ a)



6.

6.1. Pela observação da figura, podemos concluir que:

- o número de pessoas que realizaram passeios com duração superior a duas horas, no três tipos de passeio, considerando os totais por tipo de passeio e a percentagem por cada tipo de passeio, foi de $200 \times 0,25 + 120 \times 10 + 80 \times 0,4 = 94$.
- Considerando apenas os passeios com duração igual ou inferior a uma hora, os de cada tipo, são: $200 \times 0,5 = 100$ de gaivota ; $120 \times 0,6 = 72$ de canos e $80 \times 0,4 = 32$ de barco.
- Relativamente às 80 pessoas que realizaram um passeio de barco, como 22 tinham uma idade na classe $[18, 26[$ e 25 tinham uma idade na classe $[26, 34[$, é nesta classe que se situa a idade mediana (por ultrapassar cumulativamente os 50% dos passeios deste tipo, correspondente a 40 pessoas).
- Ainda sobre as 80 pessoas que realizaram um passeio de barco, como $22 + 25 = 47$ têm uma idade inferior a 34 anos, a que corresponde uma percentagem de $\frac{47}{80} \times 100 = 58,75\%$.

Assim, temos que:

O número de pessoas que realizaram passeios com duração superior a duas horas foi 94 . Dos passeios com duração inferior ou igual a uma hora, o que registou o maior número de pessoas foi o passeio de gaivota . No que respeita às pessoas que realizaram um passeio de barco, verifica-se que a mediana das suas idades pertence à classe $[26, 34[$, e que a percentagem das que têm idade inferior a 34 anos é igual a 58,75% .

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ a)
- II $\rightarrow$ c)
- III $\rightarrow$ b)
- IV $\rightarrow$ b)

6.2. De acordo com os dados da figura, e à distribuição das idades dos participantes, temos que:

- a frequência absoluta da classe $[18, 26[$ é $80 + 28 + 22 = 130$, a que corresponde uma frequência relativa de $\frac{130}{400} = 0,325$;
- a frequência absoluta da classe $[26, 34[$ é $80 + 57 + 25 = 162$, a que corresponde uma frequência relativa de $\frac{162}{400} = 0,405$.

Assim, o valor da frequência relativa acumulada da classe $[26, 34[$, para as idades das 400 pessoas, é $0,325 + 0,405 = 0,73$.

Resposta: **Opção D**

- 6.3. Relativamente às pessoas que realizaram passeios de gaivota, e considerando que as idades se distribuem uniformemente em cada uma das classes etárias apresentadas, podem ser consideradas as marcas de classe, de cada uma das classes (respetivamente 22, 30, 38 e 46) e as frequências absolutas de cada classe (respetivamente 80, 80, 24 e 16), temos que a média do grupo inicial de 200 pessoas é dada por:

$$\frac{22 \times 80 + 30 \times 80 + 38 \times 24 + 46 \times 16}{200} = \frac{5808}{200}$$

Considerando o aumento do número de pessoas de 200 para 224 e que as 24 pessoas adicionais têm todas a mesma idade (n), e que a média deste grupo alargado é 30, então vem que:

$$\frac{5808 + 24 \times n}{200 + 24} = 30 \Leftrightarrow 5808 + 24n = 30 \times 224 \Leftrightarrow 5808 + 24n = 6720 \Leftrightarrow 24n = 6720 - 5808 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{912}{24} \Leftrightarrow n = 38$$

Assim, concluímos que a idade de cada uma das 24 pessoas do grupo A é 38 anos, pelo que pertence a classe etária [34, 42].

7.

- 7.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, dois dos menores de idade cujas respostas estão registadas na tabela, a probabilidade de ambos terem sido inquiridos em praias da mesma região, é a soma das probabilidades de ambos terem sido inquiridos na região do Algarve, e de ambos terem sido inquiridos na região Norte.

Assim considerando que em cada região foram inquiridos, respetivamente 275 e 225 jovens, a probabilidade solicitada, na forma de dízima, com arredondamento às décimas, é:

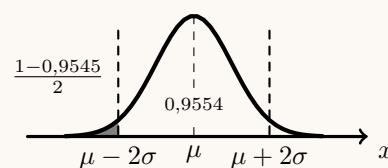
$$\overbrace{\frac{275}{500} \times \frac{274}{499}}^{\text{Algarve}} + \overbrace{\frac{225}{500} \times \frac{224}{499}}^{\text{Norte}} \approx 0,5$$

- 7.2. Considerando a variável aleatória X como o tempo, em minutos, que as pessoas, inquiridas nas praias do Algarve, estiveram dentro de água da última vez que foram ao banho, temos que $\mu = 20$ e $\sigma = 2,5$.

Assim, como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio, e $15 = 20 - 2 \times 2,5$, ou seja, $15 = \mu - 2\sigma$, temos que:

- $P(15 \leq X \leq 25) \approx 0,9545$
- $P(X \leq 15) = \frac{1 - P(15 \leq X \leq 25)}{2} \approx \frac{1 - 0,9545}{2} \approx 0,02275$

(Este valor também pode ser obtido na calculadora identificando a distribuição normal de média 20 e desvio padrão 2,5).



Assim, temos que:

- das 100 000 pessoas inquiridas, o número esperado dos que referiram ter estado menos de 15 minutos dentro de água da última vez que foram ao banho, é $100\,000 \times 0,02275 = 2275$;
- como foram 275 os menores inquiridos que referiram enquadrar-se neste grupo, os restantes 2000 ($2275 - 275 = 2000$) são maiores de idade inquiridos nas praias do Algarve.

Logo como o total de pessoas maiores de idade inquiridas é 3700, a probabilidade, arredondada às décimas, de uma destas pessoas ter sido inquirida numa praia do Algarve e ter respondido que o último banho teve duração inferior a 15 minutos é:

$$p = \frac{2000}{3700} \approx 0,54$$



8. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 350 + 850 + 180 + 220 = 1600$
- A proporção de pessoas que, na deslocação entre o seu alojamento e a praia, despenderam, no máximo, 30 minutos: $\hat{p} = \frac{350 + 850}{1600} = 0,75$
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2,576$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left[0,75 - 2,576\sqrt{\frac{0,75(1-0,75)}{1600}}; 0,75 + 2,576\sqrt{\frac{0,75(1-0,75)}{1600}} \right] \approx]0,72; 0,78[$$

