

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2025, 2.ª fase)
Proposta de resolução



1.

- 1.1. A probabilidade de selecionar o *Trail* dos Abutres» para a primeira posição da lista é $\frac{1}{4}$ e a probabilidade de selecionar o *Trail* da Serra d'Arga» para a segunda posição da lista, sabendo que não foi selecionada para a primeira posição, é $\frac{1}{3}$.

Como as duas provas devem ser selecionadas, para as duas primeiras posições, não necessariamente por esta ordem, devemos considerar também a hipótese da ordenação contrária como favorável, pelo que a probabilidade é:

$$p = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Resposta: **Opção D**

- 1.2. Aplicando o método descrito, temos:

- Número de votos necessário para obter maioria absoluta: 14 (porque $\frac{27}{2} = 13,5$).
- Observando o número de votos em cada prova, como primeira preferência, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta (a prova mais votada foi o *Trail* dos Abutres com $4+8 = 12$ votos, seguida do *Trail* dos Morcegos com 8 votos e do *Trail* das Linhas de Torres com 7 votos).
- Reestruturando a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a prova que obteve mais votos, como última preferência - o *Trail* dos Abutres com $8 + 7 = 15$ votos (as restantes possibilidades eram o *Trail* dos Morcegos com 8 votos e o *Trail* das Linhas de Torres com 4 votos) - temos:

Preferências \ N.º de votos	N.º de votos			
	8	7	4	8
1.ª	M	T	S	T
2.ª	S	M	M	S
3.ª	T	S	T	M

Assim, a prova selecionada pela Luísa é o *Trail* das Linhas de Torres por ser a prova com maioria absoluta de votos na primeira preferência: $7 + 8 = 15$ (as restantes possibilidades eram o *Trail* dos Morcegos com 8 votos e o *Trail* da Serra d'Arga com 4 votos).

2. Procedendo à distribuição dos bens, aplicando o método descrito, temos:

	Ana	Francisco	Manuela
X	75	120	70
Y	102	90	65
Valor global	$75 + 102 = 177$	$120 + 90 = 210$	$70 + 65 = 135$
Valor justo	$\frac{177}{3} = 59$	$\frac{210}{3} = 70$	$\frac{135}{3} = 45$
Atribuição (valor)	Y (102)	X (120)	– (0)
Valor a disponibilizar	$102 - 59 = 43$	$120 - 70 = 50$	–
Valor a receber	–	–	$45 - 0 = 45$
Dinheiro restante	$43 + 50 - 45 = 48$		
Distribuição adicional	$\frac{48}{3} = 16$	$\frac{48}{3} = 16$	$\frac{48}{3} = 16$
Valor em dinheiro	$43 - 16 = 27$ (paga)	$50 - 16 = 34$ (paga)	$45 + 16 = 61$ (recebe)

Assim, a partilha final dos prémios pelos dois amigos é:

- a Ana recebe o prémio Y e paga 27 euros;
- o Francisco recebe o prémio X e paga 34 euros;
- a Manuela recebe 61 euros.

Assim, vem que:

O Francisco considera que o valor global dos dois prémios é 210 €, e 59 € é o valor que a Ana considera justo receber. Concluída a aplicação do método descrito, a Manuela não fica com nenhum prémio, mas recebe um total de 61 €.

Logo, as correspondências corretas são:

- I → a)
- II → a)
- III → c)
- IV → c)



3. Os custos de inscrição dos trabalhadores da empresa, em cada prova, foram:

- prova K100: $60 + 90 = 150$ €;
- prova K100/2 + transporte: $2 \times 40 + 2 \times 4 = 88$ €;
- prova K50 + transporte: $4 \times 35 + 4 \times 3 = 152$ €.

Assim o valor total das inscrições dos trabalhadores da empresa foi $150 + 88 + 152 = 390$ €.

Pelo que a empresa comparticipou o valor de $390 \times 0,6 = 234$ €.

4. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, iniciando a prova no posto de controlo C2, obtemos a seguinte sequência de posto de controlo e um grafo ponderado que representa o percurso escolhido pela aplicação do método descrito:

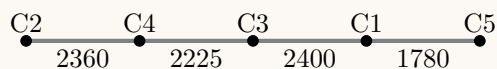
I : C2 - C4 (2360 m)

II : C4 - C3 (2225 m)

III : C3 - C1 (2400 m)

(não se selecciona o troço C3-C4 nem o troço C3-C2, porque C4 e C2 seriam repetidos)

IV : C1 - C5 (1780 m)



Desta forma, a ordem de passagem pelos postos de controlo, é: $C2 \rightarrow C4 \rightarrow C3 \rightarrow C1 \rightarrow C5$.

E o comprimento do percurso da prova, respeitando as condições definidas, é:

$$2360 + 2225 + 2400 + 1780 = 8765 \text{ m}$$



5.

5.1. De acordo com o modelo e pela observação do gráfico é possível verificar que o número de utilizadores da AppCaminhadas:

- no início de 2000 era $C(0) = 20 + 5 \log_{10}(9 \times 0 + 10) = 25$ milhares;
- no início de 2010 era $C(10) = 20 + 5 \log_{10}(9 \times 10 + 10) = 30$ milhares;
- nos primeiros dez anos, após o início do ano 2000, teve um aumento de 5 milhares;
- aumentou de 2010 para 2011 e depois diminuiu de 2011 para 2012 na região de Lisboa e Vale do Tejo;
- cresceu mais de 2 milhares de 2010 para 2011 e cerca de meio milhar de 2011 para 2012 na região Centro;
- cresceu 65 milhares ($5249 - 5184 = 65$) de 2010 para 2011 e novamente 65 milhares ($5314 - 5249 = 65$) de 2011 para 2012 na região Norte, pelo que foi nesta região que se registou um crescimento linear;
- no início de 2012, era $C(12) = 20 + 5 \log_{10}(9 \times 12 + 10) \approx 30,36$ milhares, e um sétimo deste valor é $\frac{1}{7} \times 30,36 \approx 4,337$ que corresponde ao número de utilizadores na região de Lisboa e Vale do Tejo no início desse ano;
- no início de 2011, era $C(11) = 20 + 5 \log_{10}(9 \times 11 + 10) \approx 30,187$ milhares, e o número acumulado de utilizadores nas três regiões era $5,294 + 6,561 + 8,717 = 20,572$ milhares, a que corresponde uma percentagem relativamente ao total de $\frac{20,572}{30,187} \times 100 \approx 68\%$.

Desta forma, temos que:

Nos primeiros dez anos, após o início do ano 2000, em Portugal, o número de utilizadores da AppCaminhadas teve um aumento de 5 milhares de utilizadores. Comparando o número de utilizadores da AppCaminhadas no início dos anos de 2010, de 2011 e de 2012, apresentados na Figura 1, conclui-se que é na região Norte que o número de utilizadores poderá apresentar um crescimento linear. No início de 2012, em Portugal, um sétimo do número de utilizadores da AppCaminhadas pertencia à região de Lisboa e Vale do Tejo.

No início de 2011, em Portugal, a percentagem, arredondada às unidades, do número de utilizadores da AppCaminhadas que pertencia às regiões Norte, Centro e de Lisboa e Vale do Tejo era 68%.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ c)
- II $\rightarrow$ a)
- III $\rightarrow$ c)
- IV $\rightarrow$ b)



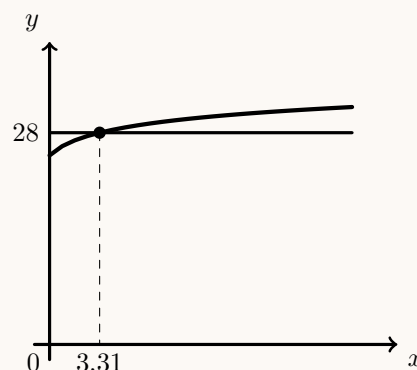
- 5.2. Como 20% do número de subscritores da aplicação no início de um ano corresponde a 5600, ou seja, 5,6 milhares, podemos calcular o número total de subscritores no mesmo momento:

$$\frac{x}{5,6} = \frac{100}{20} \Leftrightarrow x = \frac{100 \times 5,6}{20} \Leftrightarrow x = 28$$

Assim, vamos usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta $y = 28$. Representamos o gráfico da função $f(x) = 20 + 5 \log(9x + 10)$ e a reta $g(x) = 28$, numa janela ajustada, e obtemos o valor, arredondado às décimas, da abcissa do ponto de interseção:

$$x \approx 3,31$$

Assim, temos que o ano em que 20% dos utilizadores subcreveram a versão *Premium* foi 3,31 anos decorridos após o início do ano 2000, ou seja, no ano de 2003.

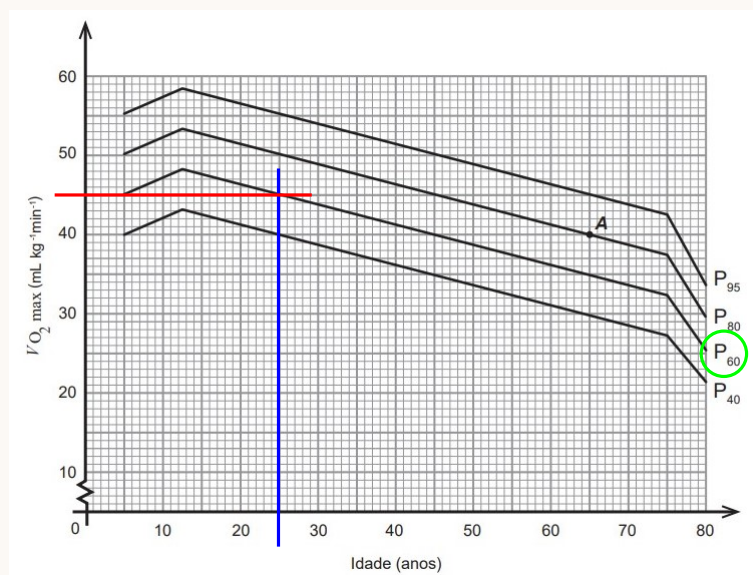


- 5.3. Como 3000 utilizadores corresponde a 3 milhares, um acréscimo de 3000 utilizadores da AppTrilhos no início do ano 2015 é representada por $3 + T(15)$. Como o número de utilizadores da Caminhadas no início do ano 2015 é representada por $C(15)$, temos que a afirmação é representada por $C(15) = 3 + T(15)$.

Resposta: **Opção A**

6.

- 6.1. Analisando o gráfico de percentis, e identificando os pontos correspondentes a utilizadores com 25 anos (a azul) e os pontos correspondente a um valor de $V_{O_2\max}$ igual a $45 \text{ mLkg}^{-1}\text{min}^{-1}$ (a vermelho), temos:



Como o ponto identificado se encontra no percentil 60, é esperado que 60% dos utilizadores da amostra registre um valor de $V_{O_2\max}$ abaixo de $45 \text{ mLkg}^{-1}\text{min}^{-1}$, ou seja, $0,6 \times 200 = 120$ utilizadores.

Resposta: **Opção B**



6.2. Pela observação do histograma, e observando que a frequência simples de cada classe, pode ser determinada pela diferença das frequências relativas de classes consecutivas, temos:

Classes	[10,20[	[20,30[	[30,40[	[40,50[	[50,60[
Frequências acumuladas	18%	48%	60%	80%	100%
Frequências simples	18%	$48 - 18 = 30\%$	$60 - 48 = 12\%$	$80 - 60 = 20\%$	$100 - 80 = 20\%$

- assim a classe $[20,30[$ é a que regista maior frequência simples, pelo que é a classe modal;
- a classe com menor número de utilizadores é a classe $[30,40[$.

Pela observação do diagrama de extremos e quartis podemos verificar que:

- como o valor mínimo pertence à classe $[10,20[$, de entre os valores apresentados o único que pode ser o valor de x é 11;
- como o 1.º quartil (que corresponde a 25% da amostra) pertence à classe $[20,30[$, de entre os valores apresentados o único que pode ser o valor de y é 22.

Desta forma, temos que:

A classe modal dos dados recolhidos foi a classe $[20,30[$, e a classe à qual corresponde o menor número de utilizadores foi a classe $[30,40[$.

No diagrama de extremos e quartis, um possível valor de x é 11, e um possível valor de y é 22.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ b)
- II $\rightarrow$ c)
- III $\rightarrow$ a)
- IV $\rightarrow$ b)

6.3. Temos que a média relativa ao grupo A, é $\bar{x}_A = 41,25 \text{ mLkg}^{-1}\text{min}^{-1}$ (este valor pode ser calculado inserindo numa lista da calculadora os valores 20, 37, 37, 39, 41, 41, 41, 43, 46, 46, 52 e 52, e observando a média dos valores da lista).

Como a média das 36 pessoas ($\bar{x}_{AB}$) é obtida a partir das médias dos grupos A e B, multiplicadas pelo número de pessoas de cada grupo, pelo que podemos calcular a média do grupo B ($\bar{x}_B$):

$$\begin{aligned}\bar{x}_{AB} &= \frac{\bar{x}_A \times 12 + \bar{x}_B \times 24}{36} \Leftrightarrow 45 = \frac{41,25 \times 12 + \bar{x}_B \times 24}{36} \Leftrightarrow 45 \times 36 = 495 + \bar{x}_B \times 24 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1620 - 495 = \bar{x}_B \times 24 \Leftrightarrow \frac{1125}{24} = \bar{x}_B \Leftrightarrow \bar{x}_B = 46,875 \text{ mLkg}^{-1}\text{min}^{-1}\end{aligned}$$

6.4. Inserindo na calculadora gráfica as listas relativas às variáveis x e y :

x	36	48	60	72	84
y	250	198	164	140	122

Determinamos a equação da reta de regressão ($y = ax + b$), obtendo os seguintes valores $a \approx -2,617$ e $b = 331,8$.

Desta forma a equação da reta de regressão é $y = -2,617x - 331,8$, pelo que, um praticante que no momento em que iniciou uma maratona, tinha um $V_{O_2 \text{ max}}$ igual a $50 \text{ mLkg}^{-1}\text{min}^{-1}$ ($x = 50$), prevê-se, com base no modelo de regressão linear, que o tempo mínimo necessário para que esse praticante conclua essa maratona (y), com base no modelo de regressão linear, é:

$$y = -2,616 \times 50 + 331,8 = 201 \text{ min}$$



7.

- 7.1. De acordo com os dados do enunciado e da análise dos gráficos e considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos inscritos na edição de 2024 desta prova de *trail* e os acontecimentos:

N : "O inscrito nunca tinha participado numa prova deste tipo".

S : "O inscrito pertence ao escalão etário Sub23".

Temos que: $P(N) = 0,4$, $P(\bar{N}) = 0,6$, $P(S) = 0,2$, $P(\bar{S}) = 0,8$ e $P(S|N) = 0,35$.

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(S \cap N) = P(S|N) \times P(N) = 0,35 \times 0,4 = 0,14$
- $P(\bar{S} \cap \bar{N}) = P(\bar{N}) - P(S \cap \bar{N}) = 0,6 - 0,06 = 0,54$

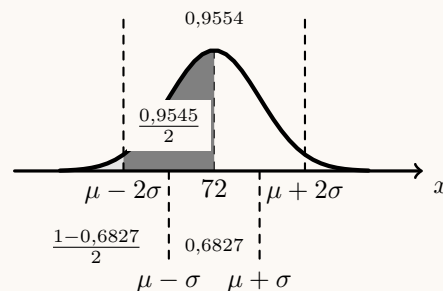
Ou seja, a probabilidade do inscrito selecionado já ter participado numa prova deste tipo e não pertencer ao escalão etário Sub23 é 54%.

	N	$\bar{N}$	
S	0,14	0,06	0,2
$\bar{S}$		0,54	0,8
	0,4	0,6	1

- 7.2. Considera-se a variável aleatória X como o peso, em quilogramas, dos inscritos na prova, com $\mu = 72$.

Assim, temos que:

- como $80 > \mu$, então $P(X > 80) < 0,5$;
- como $78 = \mu + 6$, e $66 = \mu - 2$, então como a distribuição normal é simétrica, temos que $P(X > 78) = P(X < 66)$;
- como $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$ e a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio, então $P(\mu - 2\sigma < X) = P(72 - 2\sigma < X) \approx \frac{0,9545}{2} = 0,47725$
- $P(X \leq \mu - \sigma) = \frac{1 - P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)}{2} \approx \frac{1 - 0,6827}{2} \approx 0,15865$



Assim, selecionando-se, ao acaso, um dos inscritos nesta prova, temos que:

A probabilidade de o seu peso ser superior a 80 quilogramas pode ser 0,45, e a probabilidade de o seu peso ser superior a 78 quilogramas é igual à probabilidade de o seu peso ser inferior a 66 quilogramas. A probabilidade de esse inscrito ter um peso entre $72 - 2\sigma$ e 72 quilogramas é, aproximadamente, 0,47725. A probabilidade de o seu peso ser inferior a $72 - \sigma$ quilogramas é igual a, aproximadamente, 0,15865.

Logo, as correspondências corretas são:

- I $\rightarrow$ a)
- II $\rightarrow$ b)
- III $\rightarrow$ b)
- IV $\rightarrow$ a)

